

ANÁLISIS DE FUERZAS ESTÁTICAS EN UN MANIPULADOR PARALELO 6-RKS TIPO-HUNT MODELADO CON COORDENADAS NATURALES

I. Zabalza*, J. Ros*, J.J. Gil*, J.M. Pintor*, y J.M. Jiménez* **

* Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales
Universidad Pública de Navarra
Campus Arrosadía, 31006 Pamplona, España
e-mail: [izavi, jros, javier.gil, txma, josemanuel.jimenez]@unavarra.es

** Sport Training Technologies, S.L.
Parque Empresarial Zuazu, Edif. Easo, 2ª planta, 20018 San Sebastián, España
e-mail: jmjimenez@simtechniques.com

Palabras clave: Estática, Manipulador paralelo, Robot, Multisólido, Métodos numéricos.

Resumen. *En este artículo se realiza un análisis sobre los métodos más utilizados en el estudio de las fuerzas estáticas en manipuladores paralelos basados en la matriz jacobina cinemática. Se pone de manifiesto la dificultad de obtención de la matriz jacobiana cinemática que relaciona los movimientos de los actuadores con los de la plataforma móvil y de las fuerzas ejercidas por los actuadores con las fuerzas aplicadas sobre la plataforma móvil para lograr el equilibrio del manipulador. Se propone un método de estudio de las fuerzas estáticas modelando el manipulador paralelo con coordenadas naturales de puntos característicos e introduciendo las condiciones de restricción geométricas entre dichos puntos. Finalmente se presenta un ejemplo numérico de cálculo de los pares a introducir por los actuadores para equilibrar a una fuerza y un par aplicados sobre la plataforma móvil.*

1. INTRODUCCIÓN

Varios autores han estudiado la relación entre las fuerzas que deben realizar los actuadores y las fuerzas aplicadas en la plataforma móvil en algunos tipos de manipuladores paralelos para que éstos estén en equilibrio. Merlet [1] establece el sistema de ecuaciones (1) que relaciona los desplazamientos de los actuadores con los desplazamientos de la plataforma móvil.

$$\Delta p = J^{-1} \Delta q \quad (1)$$

Donde “ Δp ” representa el desplazamiento de los actuadores, “ Δq ” los desplazamientos de la plataforma móvil y “ J^{-1} ” es la matriz jacobiana cinemática inversa.

También establece el sistema de ecuaciones (2) que relaciona las fuerzas aplicadas por los actuadores con las fuerzas aplicadas en la plataforma móvil cuando el manipulador está en equilibrio.

$$f = J^T F \quad (2)$$

Donde “ f ” representa las fuerzas aplicadas por los actuadores, “ F ” las fuerzas aplicadas en la plataforma móvil y “ J^T ” es la matriz jacobiana cinemática traspuesta.

Waldron y Hunt [2], aplicando el principio de la conservación de la energía, llegan al sistema de ecuaciones (3) que relaciona las velocidades angular y lineal de la plataforma móvil con las velocidades de los actuadores.

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \mu \end{bmatrix} = J \dot{\theta} \quad (3)$$

Y el sistema de ecuaciones (4) que relaciona las fuerzas a aplicar por los actuadores con el momento y resultante de fuerzas aplicadas a la plataforma móvil.

$$T = J^T \begin{bmatrix} M \\ R \end{bmatrix} \quad (4)$$

Siendo “ ω ” la velocidad angular de la plataforma móvil, “ μ ” la velocidad lineal de un punto “ C ” de la plataforma móvil, “ J ” la matriz jacobiana cinemática, “ $\dot{\theta}$ ” las velocidades de los actuadores, “ T ” las fuerzas aplicadas por los actuadores, “ J^T ” la matriz jacobiana cinemática traspuesta, “ R ” la resultante de las fuerzas aplicadas a la plataforma móvil y “ M ” el momento de estas fuerzas respecto del punto “ C ”.

Merlet [3], [4] y [5] expone unos sistemas de ecuaciones (5) y (6) similares a los expuestos por Waldron y Hunt.

$$\dot{\theta} = J^{-1} W \quad (5)$$

$$\tau = J^T F \quad (6)$$

Donde “ $\dot{\theta}$ ” representa las velocidades de los actuadores, “ J^{-1} ” es el jacobiano cinemático inverso, “ W ” es un vector de dimensión 6 que representa la velocidad de un punto “ C ” y la velocidad angular de la plataforma móvil (twist), “ τ ” representa las fuerzas aplicadas por los actuadores, “ J^T ” es el jacobiano directo traspuesto y “ F ” representa la resultante y el par respecto del punto “ C ” de las fuerzas aplicadas a la plataforma móvil (wrench).

Otros autores como Gosselin [6], Tahmasebi y Tsai [7] y Kosuge et al. [8] exponen unos sistemas de ecuaciones, que unificando la nomenclatura, resultarían los sistemas (7) y (8), y que en el fondo tienen el mismo significado que los de Waldron y Hunt y Merlet.

$$\dot{\theta} = J\dot{X} \quad (7)$$

$$F = J^T f \quad (8)$$

Siendo “ $\dot{\theta}$ ” las velocidades de los actuadores, “ J ” la matriz jacobiana, “ \dot{X} ” las velocidades de la plataforma móvil, “ F ” las fuerzas aplicadas a la plataforma móvil “ J^T ” la matriz jacobiana traspuesta y “ f ” las fuerzas aplicadas por los actuadores.

Se debe poner de manifiesto que Gosselin, Tahamasebi y Tsai y Kosuge et al. denominan matriz jacobiana a la matriz que tanto Merlet como Waldron y Hunt denominan matriz jacobiana cinemática inversa.

Merlet en [3], [4] y [5] determina la matriz jacobiana cinemática inversa “ J^{-1} ” para varios tipos de manipuladores paralelos, entre ellos para el tipo 6-RKS, pero expone que la obtención de la matriz jacobiana directa “ J ”, directamente o por inversión de la matriz inversa, es casi impracticable por lo engorroso de las operaciones.

2. MANIPULADOR PARALELO 6-RKS

El manipulador paralelo 6-RKS (Figura1) fue introducido por Hunt [9] en 1983.

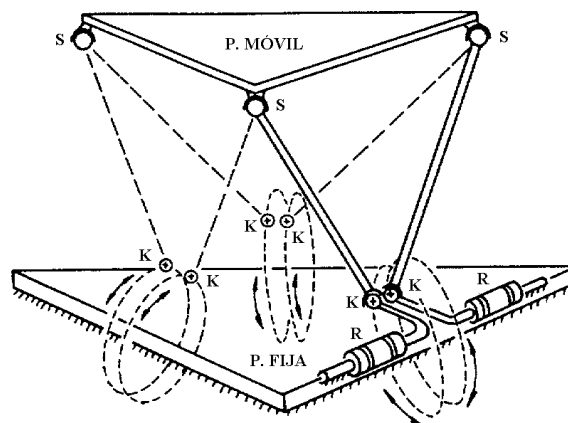


Figura 1. Manipulador paralelo 6-RKS

Este manipulador paralelo está formado por dos plataformas triangulares, una de ellas fija al suelo. Sobre la plataforma fija están montados seis actuadores giratorios (R) con sus ejes localizados sobre los lados de un triángulo. Estos actuadores son los elementos de entrada de movimiento y cada uno está compuesto por un motor giratorio y una manivela. La manivela de cada actuador está conectada a la plataforma móvil por medio de una biela. En cada biela, un extremo está conectado a la manivela del actuador por medio de una junta cardan (K) y por el otro extremo a la plataforma móvil por medio de una junta esférica (S), como se muestra en la (Figura 1). Un par de bielas convergen a cada vértice de la plataforma móvil.

Para el análisis tanto de velocidades como de pares y fuerzas, en este manipulador paralelo son aplicables los sistemas de ecuaciones (5) y (6) propuestos por Merlet, siendo en este caso: " $\dot{\theta}$ " las velocidades angulares de los actuadores, " J^{-1} " el jacobiano cinemático inverso, " W " un vector de dimensión 6 que representa la velocidad de un punto " C " y la velocidad angular de la plataforma móvil (twist), " τ " los pares aplicados por los actuadores, " J^T " es el jacobiano directo traspuesto y " F " la resultante y el par respecto del punto " C " de las fuerzas aplicadas a la plataforma móvil (wrench).

Para la resolución del sistema de ecuaciones (5) es relativamente sencilla la obtención del jacobiano cinemático inverso " J^{-1} ", pero si se desea obtener las velocidades de la plataforma móvil en función de las velocidades de los actuadores, se debe utilizar el jacobiano cinemático directo " J ", cuya obtención tanto de forma directa como por inversión del jacobiano cinemático inverso es muy complicada.

La dificultad expuesta en el párrafo anterior también es de aplicación para el sistema de ecuaciones (6) si se desea obtener los pares " τ " a aplicar por los actuadores con el fin de equilibrar a un sistema de fuerzas y pares " F " aplicados sobre la plataforma móvil.

3. MODELADO DEL MANIPULADOR CON COORDENADAS NATURALES

Con el fin de evitar las dificultades expuestas en el punto anterior, se utiliza el método propuesto por García de Jalón y Bayo [10]. Este método consiste en definir una serie de puntos característicos del manipulador por medio de sus coordenadas cartesianas (coordenadas naturales), establecer unas condiciones de restricción geométricas entre los puntos característicos que se deben cumplir durante el funcionamiento del manipulador y realizar los análisis cinemáticos y dinámicos basados en las condiciones de restricción.

Los puntos característicos del manipulador paralelo pueden observarse en la (Figura 2) y la nomenclatura utilizada en la topología de este manipulador (Figura 3) es:

- 1_i Centro de la articulación cardan del extremo de la manivela del actuador " i ".
- 0_i Punto del eje del actuador " i ", en la base de la perpendicular trazada a dicho eje desde el punto " 1_i ".
- R_i Longitud de la manivela correspondiente al actuador " i " y que une los puntos " 0_i " con " 1_i ".

- L_i Longitud de la biela correspondiente al actuador “i” y que une el punto “ li ” con el correspondiente vértice de la plataforma móvil.
- l_{jk} Centro de la rótula de la plataforma móvil donde se unen las bielas “j” y “k”, para $jk = [23, 45, 61]$.
- A_{pq} Longitud del lado de la plataforma móvil entre las bielas “p” y “q”, para $pq = [12, 34, 56]$.

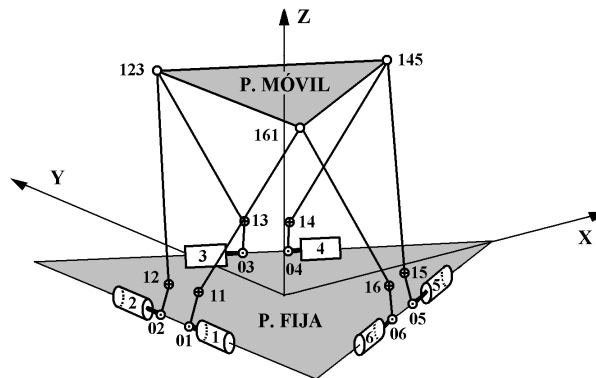


Figura 2. Puntos característicos del manipulador paralelo 6-RKS

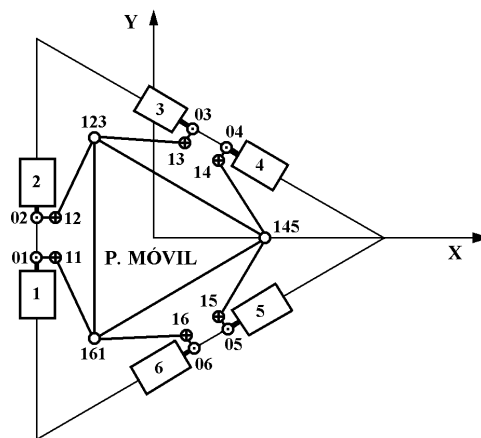


Figura 3. Nomenclatura del manipulador paralelo 6-RKS

4. ECUACIONES DE RESTRICCIÓN

Suponiendo conocidas las posiciones de los actuadores sobre la plataforma fija y las longitudes de las manivelas, bielas y lados del triángulo de la plataforma móvil, y utilizando la

nomenclatura introducida en el apartado (3). Para las longitudes constantes de las manivelas se pueden establecer las siguientes condiciones de restricción:

$$(X_{11} - X_{01})^2 + (Y_{11} - Y_{01})^2 + (Z_{11} - Z_{01})^2 - R_1^2 = 0 \quad (9)$$

$$(X_{12} - X_{02})^2 + (Y_{12} - Y_{02})^2 + (Z_{12} - Z_{02})^2 - R_2^2 = 0 \quad (10)$$

$$(X_{13} - X_{03})^2 + (Y_{13} - Y_{03})^2 + (Z_{13} - Z_{03})^2 - R_3^2 = 0 \quad (11)$$

$$(X_{14} - X_{04})^2 + (Y_{14} - Y_{04})^2 + (Z_{14} - Z_{04})^2 - R_4^2 = 0 \quad (12)$$

$$(X_{15} - X_{05})^2 + (Y_{15} - Y_{05})^2 + (Z_{15} - Z_{05})^2 - R_5^2 = 0 \quad (13)$$

$$(X_{16} - X_{06})^2 + (Y_{16} - Y_{06})^2 + (Z_{16} - Z_{06})^2 - R_6^2 = 0 \quad (14)$$

Los puntos 11 a 16, (extremos de las manivelas), describen circunferencias en planos perpendiculares a los ejes de los actuadores. Para expresar la perpendicularidad entre los radios de las circunferencias y los ejes de los actuadores correspondientes, teniendo en cuenta que los ejes de los actuadores “1” y “2” son coincidentes y lo mismo ocurre para los actuadores “3” y “4” y para los actuadores “5” y “6”, se plantean las condiciones de restricción siguientes:

$$(X_{11} - X_{01}) \cdot (X_{02} - X_{01}) + (Y_{11} - Y_{01}) \cdot (Y_{02} - Y_{01}) + (Z_{11} - Z_{01}) \cdot (Z_{02} - Z_{01}) = 0 \quad (15)$$

$$(X_{12} - X_{02}) \cdot (X_{02} - X_{01}) + (Y_{12} - Y_{02}) \cdot (Y_{02} - Y_{01}) + (Z_{12} - Z_{02}) \cdot (Z_{02} - Z_{01}) = 0 \quad (16)$$

$$(X_{13} - X_{03}) \cdot (X_{04} - X_{03}) + (Y_{13} - Y_{03}) \cdot (Y_{04} - Y_{03}) + (Z_{13} - Z_{03}) \cdot (Z_{04} - Z_{03}) = 0 \quad (17)$$

$$(X_{14} - X_{04}) \cdot (X_{04} - X_{03}) + (Y_{14} - Y_{04}) \cdot (Y_{04} - Y_{03}) + (Z_{14} - Z_{04}) \cdot (Z_{04} - Z_{03}) = 0 \quad (18)$$

$$(X_{15} - X_{05}) \cdot (X_{06} - X_{05}) + (Y_{15} - Y_{05}) \cdot (Y_{06} - Y_{05}) + (Z_{15} - Z_{05}) \cdot (Z_{06} - Z_{05}) = 0 \quad (19)$$

$$(X_{16} - X_{06}) \cdot (X_{06} - X_{05}) + (Y_{16} - Y_{06}) \cdot (Y_{06} - Y_{05}) + (Z_{16} - Z_{06}) \cdot (Z_{06} - Z_{05}) = 0 \quad (20)$$

Para las longitudes constantes de las bielas se establecen las condiciones de restricción siguientes:

$$(X_{161} - X_{11})^2 + (Y_{161} - Y_{11})^2 + (Z_{161} - Z_{11})^2 - L_1^2 = 0 \quad (21)$$

$$(X_{123} - X_{12})^2 + (Y_{123} - Y_{12})^2 + (Z_{123} - Z_{12})^2 - L_2^2 = 0 \quad (22)$$

$$(X_{123} - X_{13})^2 + (Y_{123} - Y_{13})^2 + (Z_{123} - Z_{13})^2 - L_3^2 = 0 \quad (23)$$

$$(X_{145} - X_{14})^2 + (Y_{145} - Y_{14})^2 + (Z_{145} - Z_{14})^2 - L_4^2 = 0 \quad (24)$$

$$(X_{145} - X_{15})^2 + (Y_{145} - Y_{15})^2 + (Z_{145} - Z_{15})^2 - L_5^2 = 0 \quad (25)$$

$$(X_{161} - X_{16})^2 + (Y_{161} - Y_{16})^2 + (Z_{161} - Z_{16})^2 - L_6^2 = 0 \quad (26)$$

Finalmente, para las longitudes constantes de los lados del triángulo de la plataforma móvil se tendrá:

$$(X_{161} - X_{123})^2 + (Y_{161} - Y_{123})^2 + (Z_{161} - Z_{123})^2 - A_{12}^2 = 0 \quad (27)$$

$$(X_{145} - X_{123})^2 + (Y_{145} - Y_{123})^2 + (Z_{145} - Z_{123})^2 - A_{34}^2 = 0 \quad (28)$$

$$(X_{161} - X_{145})^2 + (Y_{161} - Y_{145})^2 + (Z_{161} - Z_{145})^2 - A_{56}^2 = 0 \quad (29)$$

5. ANÁLISIS CINEMÁTICO

El análisis cinemático comprende el estudio de posición, velocidades y aceleraciones de una serie de puntos del manipulador. No obstante, para poder realizar el análisis de las fuerzas estáticas, solo es necesario el estudio de posición del manipulador paralelo.

5.1. Análisis de posición

En el análisis de posición del manipulador se pueden plantear dos opciones: “cinemática directa” cuando se trata de determinar la posición de la plataforma móvil siendo conocida la posición de los actuadores, y “cinemática inversa” cuando se debe determinar la posición de los actuadores siendo conocida la posición de la plataforma móvil. En ambos casos se deben cumplir las 21 ecuaciones de restricción de la (9) a la (29).

En el análisis cinemático directo, al conocerse las posiciones de los actuadores, se pueden determinar de forma inmediata las posiciones de los extremos de las manivelas (puntos 11 a 16), con lo que las ecuaciones de la (9) a la (20) se cumplen directamente. Por ello, en este caso el análisis de posición se reduce a la resolución de un sistema de 9 ecuaciones, de la (21) a la (29).

Siguiendo el método propuesto por García de Jalón y Bayo [9], el sistema de 9 ecuaciones se puede expresar abreviadamente como:

$$\Phi(q) = 0 \quad (30)$$

Siendo “q” el vector de 9 incógnitas correspondientes a las coordenadas “X”, “Y” y “Z” de los tres vértices de la plataforma móvil (puntos 123, 145 y 161).

El sistema de ecuaciones (30) se resuelve mediante la aplicación del método de Newton-Raphson.

$$\Phi(q_i) = \Phi_q(q_i) \cdot (q_i - q_{i+1}) \quad (31)$$

Donde “ Φ_q ” es el jacobiano de las 9 condiciones de restricción respecto de las incógnitas “q”.

Tomando una posición aproximada de los vértices de la plataforma móvil para iniciar la primera iteración, aplicando el método de Newton-Raphson se logra su verdadera posición.

En el análisis cinemático inverso, al conocerse la posición de la plataforma móvil, las 3 ecuaciones de restricción de la (27) a la (29) se cumplen directamente. Por ello, en este caso el análisis de posición se reduce a la resolución de un sistema de 18 ecuaciones, de la (9) a la (26).

Al igual que en el análisis cinemático directo, este sistema de 18 ecuaciones se resuelve aplicando el método iterativo de Newton-Raphson, siendo “q” el vector de 18 incógnitas correspondientes a las coordenadas “X”, “Y” y “Z” de los seis extremos de las manivelas (puntos 11 a 16) y “ Φ_q ” el jacobiano de las 18 condiciones de restricción respecto de las incógnitas “q”.

6. ANÁLISIS DE LAS FUERZAS ESTÁTICAS

Una vez determinada la posición del manipulador, se puede realizar el análisis de las fuerzas estáticas.

El análisis estático estudia la relación entre los pares aplicados por los actuadores y la resultante “R” y el par “M” equivalentes a un sistema de fuerzas aplicado sobre la plataforma móvil del manipulador.

Siguiendo el proceso expuesto por García de Jalón y Bayo [9], tomando el sistema de las ecuaciones de restricción, se plantea el sistema de ecuaciones para el cálculo de las fuerzas estáticas:

$$\Phi_q^T \lambda = Q \quad (32)$$

Donde “q” es el vector que representa los ángulos de posición de las manivelas y las coordenadas “X”, “Y” y “Z” de los puntos característicos del manipulador, “ Φ_q^T ” es la matriz jacobina traspuesta de las condiciones de restricción respecto de las componentes del vector “q”, “ λ ” es el vector de los multiplicadores de Lagrange y “Q” es el vector de los momentos ejercidos por los actuadores y las componentes “X”, “Y” y “Z” de las fuerzas externas aplicadas en los puntos característicos.

Los multiplicadores de Lagrange son proporcionales a las fuerzas o momentos a introducir para que se cumplan las condiciones de restricción.

Para el análisis de las fuerzas estáticas resulta más práctico sustituir las 12 ecuaciones de restricción relativas a las manivelas, (ecuaciones de la 9 a la 20), por las 18 ecuaciones que determinan las coordenadas de los puntos extremos de las manivelas (puntos 11 a 16) en función de los ángulos de las manivelas, y sustituir la plataforma móvil por las fuerzas que ésta realiza sobre las rótulas de sus vértices, por lo que no se deben tener en cuenta las 3 ecuaciones de restricción relativas a la plataforma móvil, (ecuaciones 27, 28 y 29).

En el sistema de ecuaciones (32) los multiplicadores de Lagrange son incógnitas y entre las componentes de fuerzas algunas serán datos y otras incógnitas en función de si se pretende determinar los pares a aplicar por los actuadores para equilibrar a las fuerzas y pares aplicados a la plataforma móvil o viceversa.

En este caso, " $\Phi(q) = 0$ " representa un sistema de 24 condiciones de restricción. Si se toman como puntos característicos las uniones de las manivelas con las bielas (puntos 11 a 16) y los vértices de la plataforma móvil (puntos 123, 145 y 161), " q " será un vector de 33 componentes, la matriz jacobiana traspuesta " Φ_q^T " tendrá 33 filas y 24 columnas, el vector de los multiplicadores de Lagrange " λ " tendrá 24 componentes y " Q " será un vector de 33 componentes, resultando el sistema de ecuaciones (32) un sistema de 33 ecuaciones.

Añadiendo 6 ecuaciones indicando que la suma de las componentes de las fuerzas sobre las rótulas de los vértices de la plataforma móvil son iguales a las componentes de " R ", y que las componentes del momento de las fuerzas anteriores respecto de un punto " C " son iguales a las componentes del momento " M ", se tendrá un sistema de 39 ecuaciones.

6.1. Estática directa

En el análisis estático directo se tienen como datos los pares aplicados por los actuadores y se trata de determinar, la fuerza " R " aplicada en un punto " C " y el momento " M " para que el manipulador esté en equilibrio.

En este caso se tendrá un sistema de 39 ecuaciones y como incógnitas figurarán los 24 multiplicadores de Lagrange, las nueve componentes de las fuerzas en las rótulas de los vértices de la plataforma móvil (puntos 123, 145 y 161) y las componentes de " R " y " M ".

6.2. Estática inversa

En el análisis estático inverso se tienen como datos una resultante " R " aplicada en un punto " C " y un momento " M " equivalentes a un sistema de fuerzas aplicadas sobre la plataforma móvil, y se deben determinar los pares a aplicar por los actuadores para que el manipulador esté en equilibrio.

En este caso se tendrá un sistema de 39 ecuaciones, teniendo como incógnitas los 24 multiplicadores de Lagrange, las 9 componentes de las fuerzas en las rótulas de los vértices de la plataforma móvil y los 6 pares a aplicar por los actuadores.

7. EJEMPLO NUMÉRICO

Se pretende determinar los pares a aplicar por los actuadores para equilibrar a un sistema de fuerzas que actúa sobre plataforma móvil, equivalente a una resultante ($R = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$) aplicada en el centro de gravedad " G " más un momento ($M = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$).

Se toma un manipulador paralelo 6-RKS (Figura 4) en el que los ejes de los actuadores montados sobre la plataforma fija forman un triángulo equilátero de un metro de lado. Los actuadores están montados simétricamente respecto de los ejes de simetría del triángulo, siendo 0.1 metros la distancia entre los puntos de las manivelas que están sobre los ejes de los actuadores de un mismo lado del triángulo, o sea las distancias de los puntos "01" a "02", "03" a "04" y "05" a "06". Las manivelas son todas iguales con una longitud de 0.1 metros y forman todas un ángulo de 30° con la horizontal medido desde el interior de la plataforma fija,

las bielas son también todas iguales de 0.6 metros de longitud, y la plataforma móvil es un triángulo equilátero de 0.5 metros de lado.

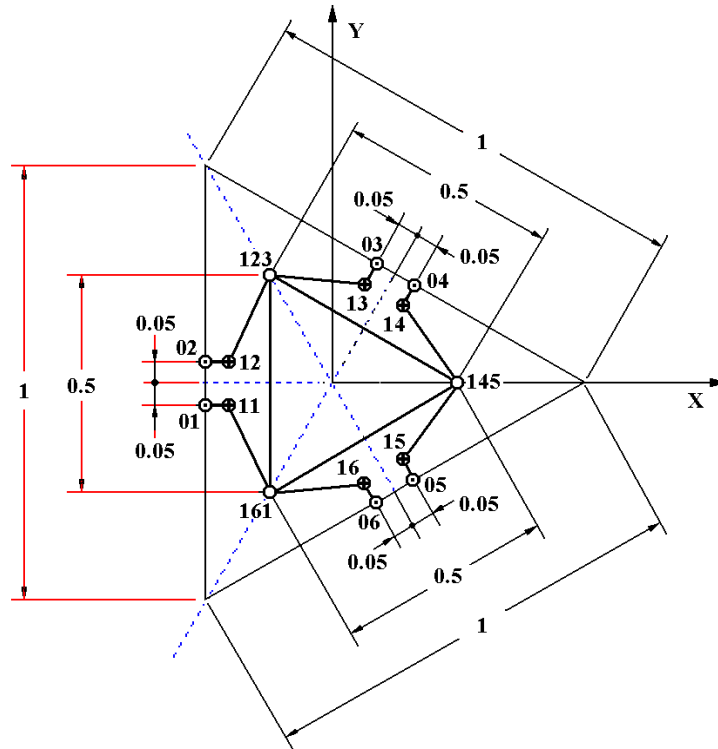


Figura 4. Ejemplo de manipulador paralelo 6-RKS

7.1. Posición

Con los datos y condiciones anteriores, y tomando como origen de coordenadas el baricentro del triángulo equilátero formado por los ejes actuadores, con los ejes “X” e “Y” contenidos en plano de los actuadores, el eje “Y” paralelo a los ejes de actuadores “1” y “2” y con el eje “Z” hacia la plataforma móvil, se tendrán las coordenadas de los puntos de los actuadores siguientes:

$$\begin{aligned}
 01 &= (-0.288675134, -0.05, 0) \\
 02 &= (-0.288675134, 0.05, 0) \\
 03 &= (0.101036297, 0.275, 0) \\
 04 &= (0.187638837, 0.225, 0) \\
 05 &= (0.187638837, -0.225, 0) \\
 06 &= (0.101036297, -0.275, 0)
 \end{aligned}$$

En este caso, las ecuaciones de restricción que se pueden plantear son las siguientes:

Para las posiciones de los puntos extremos de las manivelas:

$$X_{11} = X_{01} + R_1 \cos(\theta_1) \quad (33)$$

$$Y_{11} = Y_{01} \quad (34)$$

$$Z_{11} = Z_{01} + R_1 \text{sen}(\theta_1) \quad (35)$$

$$X_{12} = X_{02} + R_2 \cos(\theta_2) \quad (36)$$

$$Y_{12} = Y_{02} \quad (37)$$

$$Z_{12} = Z_{02} + R_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (38)$$

$$X_{13} = X_{03} - 0.5 \cdot R_3 \cos(\theta_3) \quad (39)$$

$$Y_{13} = Y_{03} - \frac{\sqrt{3}}{2} R_3 \cos(\theta_3) \quad (40)$$

$$Z_{13} = Z_{03} + R_3 \text{sen}(\theta_3) \quad (41)$$

$$X_{14} = X_{04} - 0.5 \cdot R_4 \cos(\theta_4) \quad (42)$$

$$Y_{14} = Y_{04} - \frac{\sqrt{3}}{2} R_4 \cos(\theta_4) \quad (43)$$

$$Z_{14} = Z_{04} + R_4 \text{sen}(\theta_4) \quad (44)$$

$$X_{15} = X_{05} - 0.5 \cdot R_5 \cos(\theta_5) \quad (45)$$

$$Y_{15} = Y_{05} + \frac{\sqrt{3}}{2} R_5 \cos(\theta_5) \quad (46)$$

$$Z_{15} = Z_{05} + R_5 \text{sen}(\theta_5) \quad (47)$$

$$X_{16} = X_{06} - 0.5 \cdot R_6 \cos(\theta_6) \quad (48)$$

$$Y_{16} = Y_{06} + \frac{\sqrt{3}}{2} R_6 \cos(\theta_6) \quad (49)$$

$$Z_{16} = Z_{06} + R_6 \text{sen}(\theta_6) \quad (50)$$

Para las longitudes constantes de las bielas:

$$(X_{161} - X_{11})^2 + (Y_{161} - Y_{11})^2 + (Z_{161} - Z_{11})^2 - L_1^2 = 0 \quad (51)$$

$$(X_{123} - X_{12})^2 + (Y_{123} - Y_{12})^2 + (Z_{123} - Z_{12})^2 - L_2^2 = 0 \quad (52)$$

$$(X_{123} - X_{13})^2 + (Y_{123} - Y_{13})^2 + (Z_{123} - Z_{13})^2 - L_3^2 = 0 \quad (53)$$

$$(X_{145} - X_{14})^2 + (Y_{145} - Y_{14})^2 + (Z_{145} - Z_{14})^2 - L_4^2 = 0 \quad (54)$$

$$(X_{145} - X_{15})^2 + (Y_{145} - Y_{15})^2 + (Z_{145} - Z_{15})^2 - L_5^2 = 0 \quad (55)$$

$$(X_{161} - X_{16})^2 + (Y_{161} - Y_{16})^2 + (Z_{161} - Z_{16})^2 - L_6^2 = 0 \quad (56)$$

Y para las longitudes constantes de los lados de la plataforma móvil:

$$(X_{161} - X_{123})^2 + (Y_{161} - Y_{123})^2 + (Z_{161} - Z_{123})^2 - A_{12}^2 = 0 \quad (57)$$

$$(X_{145} - X_{123})^2 + (Y_{145} - Y_{123})^2 + (Z_{145} - Z_{123})^2 - A_{34}^2 = 0 \quad (58)$$

$$(X_{161} - X_{145})^2 + (Y_{161} - Y_{145})^2 + (Z_{161} - Z_{145})^2 - A_{56}^2 = 0 \quad (59)$$

Conocidos los ángulos de posición de las manivelas, con las 18 ecuaciones de la (33) a la (50), se determinan las coordenadas de los extremos de las manivelas, que serán:

$$11 = (-0.202072594, \quad -0.05, \quad 0.05)$$

$$12 = (-0.202072594, \quad 0.05, \quad 0.05)$$

$$13 = (0.057735027, \quad 0.20, \quad 0.05)$$

$$14 = (0.144337567, \quad 0.15, \quad 0.05)$$

$$15 = (0.144337567, \quad -0.15, \quad 0.05)$$

$$16 = (0.057735027, \quad -0.20, \quad 0.05)$$

Aplicando el método expuesto en el apartado (5.1), se determinan las coordenadas de los vértices de la plataforma móvil, que serán:

$$123 = (-0.144337568, \quad 0.25, \quad 0.612731434)$$

$$145 = 0.2886751346, \quad 0, \quad 0.612731434)$$

$$161 = (-0.144337568, \quad -0.25, \quad 0.612731434)$$

7.2. Estática

Aplicando el método expuesto en el apartado (7), para un caso de estática inversa como es el presente, por medio de un programa realizado en Matlab, se obtienen los resultados siguientes:

El vector de los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda = (-2.3135, 8.0143, -22.5494, -1.8303, -6.3403, -17.8395, 0.4551, -0.1126, -1.2674, 5.6137, -5.8339, 21.8862, -3.5069, -3.6445, -13.6725, -8.4181, -2.0829, 23.4426, 20.0357, 15.8508, 1.1261, -19.4464, 12.1484, -20.8293)$$

Las fuerzas que realiza la plataforma móvil en las rótulas de sus vértices:

$$F_{161} = (10.7316, -5.9313, -0.8932)$$

$$F_{123} = (1.3752, 6.4529, 19.1068)$$

$$F_{145} = (-2.1068, 9.4784, -8.2137)$$

Y los pares ejercidos por los actuadores del (1) al (6):

$$M_a = (-1.8372, -1.4534, -0.1033, 1.7831, -1.1139, 1.9099)$$

Los multiplicadores de Lagrange del (1) al (18) representan las componentes de las fuerzas que los actuadores realizan sobre las manivelas en los puntos del (01) al (06), y que en este caso, coinciden también con las componentes de las fuerzas que las manivelas realizan sobre las bielas en los puntos del (11) al (16).

Los multiplicadores de Lagrange del (19) al (24) son proporcionales a las fuerzas de tracción en las bielas, de la (1) a la (6). El valor de cada multiplicador por dos veces la longitud de la biela respectiva representan la fuerza de tracción a la que está sometida esa biela.

8. CONCLUSIONES

En este artículo se ha realizado un análisis sobre los métodos más utilizados en el estudio de las fuerzas estáticas en manipuladores paralelos basados en la matriz jacobina cinemática. Se ha puesto de manifiesto la dificultad de obtención de la matriz jacobiana cinemática que relaciona los movimientos de los actuadores con los de la plataforma móvil y de las fuerzas ejercidas por los actuadores con las fuerzas aplicadas sobre la plataforma móvil. Se ha propuesto un método de estudio de las fuerzas estáticas modelando el manipulador paralelo con coordenadas naturales de puntos característicos e introduciendo las condiciones de restricción geométricas entre dichos puntos. Finalmente se ha presentado un ejemplo numérico de cálculo de los pares a introducir por los actuadores para equilibrar a una fuerza y un par aplicados sobre la plataforma móvil, calculando además las fuerzas que aparecen en los diferentes puntos del manipulador.

REFERENCIAS

- [1] J.P. Merlet, "Parallel manipulators, Part 1: Theory. Design, kinematics, dynamics and control", *Rapport de Recherche 646, INRIA*, (1987).
- [2] K.J. Waldron y K.H. Hunt "Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms" *Proc. of the 4th Int. Symp. on Robotic Research*, MIT press, Cambridge, MA (1987), pp. 175-181.
- [3] J.P. Merlet, *Les robots parallèles*, Hermès, París, (1990).
- [4] J.P. Merlet, *Les robots parallèles*, Hermès, París, (1997).
- [5] J.P. Merlet, *Parallel robots*, Kluwer, Dordrecht, (2000).
- [6] C. Gosselin, "Stiffness mapping for parallel manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, N° 3, (1990), pp. 377-382.
- [7] F. Tahmasebi y L.W. Tsai, "Jacobian and stiffness analysis of a novel class of six-DOF parallel minimanipulators" *Rapport de Recherche TR 92-84*, ISR, University of Maryland, (1992).
- [8] K. Kosuge, M. Okuda, H. Kawamata y T. Fukuda, "Input/output force analysis of parallel link manipulators", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Atlanta, (1993), pp. 714-719.
- [9] K. H. Hunt, "Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms", *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 105, (1983), pp. 705-712.
- [10] J. García de Jalón y E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody system*, Springer-Verlag, (1994).