

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE MOTOVIBRADORES EN SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD ELÁSTICOS

Javier Gil¹, Javier Ros¹, Isidro Zabalza¹, Jesus M^a Pintor¹, Jesús Zurita¹

1 Dpto. Ingeniería Mecánica. Universidad Pública de Navarra/Nafarroako Unibertsitate Publikoa.
Campus de Arrosadía s/n 31006 Pamplona/Iruña, Spain
[javier.gil , jros,izavi,txma, jesus.zurita]@unavarra.es

Palabras Clave: Diseño de elementos de máquinas, Vibraciones mecánicas y acústica.

Resumen: El presente artículo analiza el comportamiento de motovibradores basados en masas giratorias independientemente guiadas por motores asíncronos. El estudio enfatiza sobre la forma en que se alcanza la sincronización de las masas giratorias en relación con elasticidad/rigidez del sistema mecánico sobre el que se actúa. También se estudia el efecto de la amortiguación, y el comportamiento del sistema en el arranque/parada. Los sistemas mecánicos considerados son sistemas mecánicos genéricos y presentan diferente grado de rigidez en sus diferentes grados de libertad elásticos.

Abstract: The independent counter-rotating eccentric mass exciters are widely used to supply harmonic excitation in mechanical systems. The behavior of such a vibration generators depends not only on its own properties but on the properties of the mechanical system to which the exciters are connected. In this paper, a simple generic dynamic model is presented in order to analyse the main excitation direction of eccentric masses as a function of damping and stiffness coefficients of the mechanical system.

1.-Introducción

Los motovibradores son dispositivos frecuentemente utilizados para la inducción de un movimiento vibratorio en un sistema mecánico. El ‘grupo excitador’ está compuesto por dos motores asíncronos con sendas excéntricas de similares características girando en sentidos opuestos. El sistema así definido llega a un estacionario en el que ambos motores se sincronizan. Esta sincronía marca una dirección preferencial de excitación que, como pretende demostrarse, depende de las características del sistema al que el grupo excitador es acoplado. En este contexto, la eficiencia del conjunto se ve afectada por las características, no sólo de éste, sino del sistema mecánico sobre el que actúa.

Para estudiar la naturaleza del fenómeno de sincronía se cotejan analítica y numéricamente dos modelos mecánicos relativamente genéricos. La complejidad de los modelos presentados es creciente, pero las simplificaciones propuestas hacen posible emplear métodos tradicionales para aproximar la solución de las incógnitas de movimiento.

En los apartados 2, 3 4 y 5 del presente artículo se describen los parámetros y supuestos de cálculo de los diferentes modelos mientras que en los apartados 6 y 7 se presentan valoraciones acerca de los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas correspondientes.

2.-Caracterización del par motor

El par motor correspondiente a un motor asíncrono puede aproximarse con una expresión del tipo (Ref [2]):

$$M = \frac{aS^3 + bS}{cS^4 + dS^2 + 1} \quad S = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \quad (1)$$

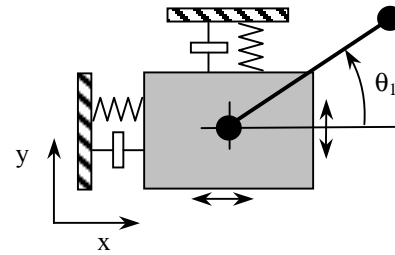
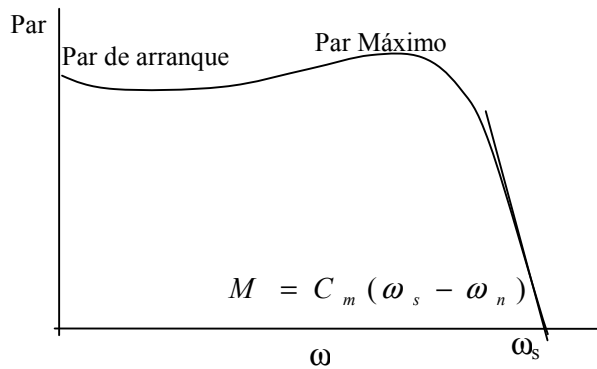


Figura I : Característica Par-velocidad de un motor asíncrono Figura II : Sistema 2 grados de libertad

Donde a, b, c y d son constantes que dependen de las características físicas del bobinado y entrehierro así como de la tensión de alimentación del mismo.

S es el denominado deslizamiento del motor.

ω_s y ω son la velocidad de sincronismo del motor y su velocidad de funcionamiento respectivamente.

Las constantes definidas anteriormente determinan tanto el par de arranque M_a , como el par máximo M_m (ver figura I). Dado que el tipo de motor objeto de estudio trabaja en un rango de velocidades próximas a la de sincronismo ω_s , la curva de par puede sustituirse por su aproximación de primer orden. El par entregado por el motor adopta entonces una expresión simplificada :

$$M = C_m (\omega_s - \omega) \quad (2)$$

en la que C_m es lo que en este artículo se denomina rigidez del motor.

3.-Sistema de dos grados de libertad con un motovibrador

El bloque de la figura II representa el sistema que se pretende excitar mediante el grupo motor. Por simplificar el problema, el grupo motor-excéntrica se reduce a un péndulo de características dinámicas equivalentes. Como ley constitutiva para el par motor se empleará la simplificación descrita en el apartado 1.

El planteamiento anterior no resuelve el problema de sincronía, puesto que la excitación se lleva a cabo mediante un solo motor. Sin embargo, pueden extraerse conclusiones acerca de cómo afecta la excitación de uno de los motores al sistema excitado en función de los parámetros que se describen a continuación.

Las características de rigidez y amortiguamiento del soporte se resumen en las constantes K_{sx} , K_{sy} , C_{sx} y C_{sy} respectivamente. El movimiento del péndulo, de masa concentrada m_p , queda descrito mediante la coordenada θ en la referencia R_b del bloque. Por otra parte, el movimiento del bloque, de masa m_b , es descrito mediante las coordenadas X e Y .

Aplicando el formalismo de Lagrange se deducen las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico en términos de las coordenadas θ , X e Y .

El sistema normalizado de ecuaciones que da solución a las incógnitas de movimiento en este caso es:

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \varepsilon(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (3)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_{ny} \dot{y} + \omega_{ny}^2 y = \varepsilon(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) \quad (4)$$

$$m_p l_p \ddot{\theta} = m_p \sin \theta \ddot{x} - m_p \cos \theta \ddot{y} + \frac{C_m (\omega_s - \dot{\theta})}{l_p} \quad (5)$$

$$\omega_{ni} = \sqrt{\frac{K_{si}}{(m_b + m_p)}} \quad \zeta_i = \frac{C_{si}}{C_{si}} = \frac{C_{si}}{2(m_b + m_p)\omega_{ni}} \quad \varepsilon = \frac{m_p l_p}{(m_b + m_p)} \quad \text{con } i=x,y \quad (6)$$

donde ω_{ni} representa la frecuencia natural del sistema, ζ_i es el amortiguamiento relativo y ε denota la excentricidad relativa.

Las ecuaciones que rigen la componente primer armónico en el estacionario ($\dot{\theta} = \omega = cte$) para las coordenadas x e y pueden obtenerse sustituyendo la ecuación (5) en las ecuaciones (3) y (4) y despreciando los términos de segundo armónico.

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \varepsilon \omega^2 \cos \theta + \frac{C_m}{(m_b + m_p)l_p} (\omega_s - \omega) \sin \theta \quad (7)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_{ny} \dot{y} + \omega_{ny}^2 y = \varepsilon \omega^2 \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \frac{C_m}{(m_b + m_p)l_p} (\omega_s - \omega) \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

Como puede apreciarse, las soluciones de régimen permanente para las ecuaciones (7) y (8) son idénticas si se tiene en cuenta que la ecuación para la coordenada y incluye un desfase de $\pi/2$ en la excitación. Además ambas ecuaciones están desacopladas y pueden resolverse por métodos tradicionales si se ensaya una solución del tipo :

$$(x, y) = \text{Re} [(\bar{x}, \bar{y}) \exp(i\omega t)] = (a_x, a_y) \cos(\omega t) + (b_x, b_y) \sin(\omega t) \quad (9)$$

Utilizando la solución obtenida y teniendo en cuenta que la disipación se lleva a cabo en los ejes x e y , puede hacerse una estimación del deslizamiento S estableciendo la igualdad siguiente:

$$E_{motor}(S) = E_{dis}(S) \quad (10)$$

$$E_{dis} = E_{disx} + E_{disy} = -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} C_{sx} \omega^2 x^2 + C_{sy} \omega^2 y^2 dt \quad (11)$$

$$E_{motor} = 2\pi C_m (\omega_s - \omega) = 2\pi C_m S \omega_s \quad (12)$$

4.-Estimación de los términos de segundo armónico

Volviendo al problema diferencial, si se sustituyen las expresiones de \ddot{x} e \ddot{y} en la ecuación 5, podría hacerse una estimación de la variación de la velocidad $\dot{\theta}$:

$$m_p l_p \ddot{\theta} + \frac{C_m}{l_p} \dot{\theta} = -m_p \omega^2 x \sin \omega t + m_p \omega^2 y \cos \omega t + \frac{C_m \omega_s}{l_p} \quad (13)$$

que admite una solución del tipo $\dot{\theta} = \omega + g \cos 2\omega t + h \cos 2\omega t$ donde los coeficientes g y h dan una idea de la magnitud de variación de la velocidad del motor. Esta estimación, que concuerda con los resultados de la simulación numérica, podría servir para resolver la amplitud del segundo armónico en las coordenadas x e y , pero se ha comprobado que ésta es despreciable.

5.-Sistema de dos grados de libertad con dos motovibradores

Para resolver éste problema, se supone que la longitud y la masa de ambas excéntricas es la misma. Además, la rigidez de cada uno de los motores es idéntica, es decir, $C_{m1} = C_{m2} = C_m$.

La diferencia con el modelo anterior estriba en que ahora, cada uno de los grados de libertad del sistema 'bloque' es excitado mediante las contribuciones de ambos motores.

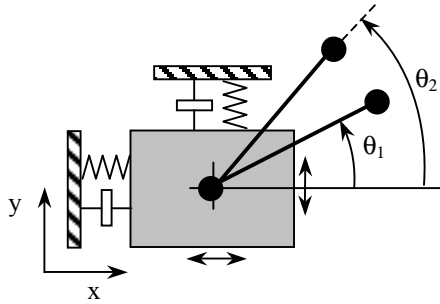


Figura III : Sistema 2 grados de libertad con dos motovibradores

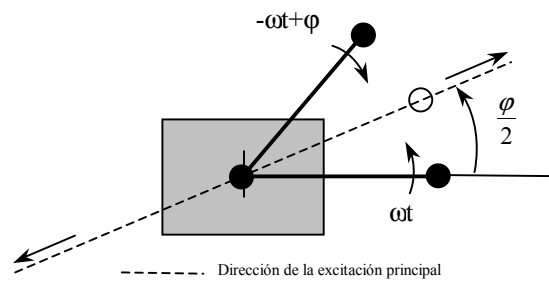


Figura IV : Dirección de máxima excitación

Las ecuaciones de movimiento para el sistema, teniendo en cuenta el signo de cada una de las velocidades son:

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \varepsilon(\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2) \quad (14)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_{ny} \dot{y} + \omega_{ny}^2 y = \varepsilon(\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2) \quad (15)$$

$$m_p l_p \ddot{\theta}_1 = m_p \sin \theta_1 \ddot{x} - m_p \cos \theta_1 \ddot{y} + \frac{C_m (\omega_s - \omega_1)}{l_p} \quad (16)$$

$$m_p l_p \ddot{\theta}_2 = m_p \sin \theta_2 \ddot{x} - m_p \cos \theta_2 \ddot{y} - \frac{C_m (\omega_s + \omega_2)}{l_p} \quad (17)$$

En este caso se supondrá que existe estacionario si $\omega_2 = -\omega_1$. Sustituyendo las dos últimas expresiones en las dos primeras y despreciando la contribución de los segundos armónicos se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \varepsilon \omega_1^2 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \frac{C_m}{(m_b + 2m_p) l_p} (\omega_s - \omega_1) (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (18)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_{ny} \dot{y} + \omega_{ny}^2 y = \varepsilon \omega_1^2 \left[\cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{C_m}{(m_b + 2m_p) l_p} (\omega_s - \omega_1) \left[\sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (19)$$

que puede resolverse de forma independiente para cada una de las coordenadas por superposición de las contribuciones en θ_1 y θ_2 .

Pensando en una solución de estacionario del tipo $\theta_2 = -\theta_1 + \varphi$, donde φ representa el ángulo de desfase entre los dos motores, es posible reorganizar el término independiente de la primera ecuación de tal forma que

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \{\lambda_1 (1 + \cos \varphi) - \lambda_2 \sin \varphi\} \cos \theta_1 + \{\lambda_2 (1 + \cos \varphi) + \lambda_1 \sin \varphi\} \sin \theta_1$$

$$\lambda_1 = \varepsilon \omega_1^2 \quad \lambda_2 = \frac{C_m}{(m_b + 2m_p)l_p} (\omega_s - \omega_1) \quad (20)$$

El conjunto de ecuaciones (19) es análogo al que podría obtenerse para la coordenada y teniendo en cuenta la un desfase de $\pi/2$ para la excitación. Nótese que, en este caso, el régimen permanente para las variables x e y depende del ángulo φ .

Aplicando el balance energético de apartados anteriores, puede llegarse a una expresión en la que la única incógnita sea el deslizamiento para un desfase concreto φ .

$$E_{dis}(\varphi, S) = E_{disx}(\varphi, S) + E_{disy}(\varphi, S) = E_{motores}(\varphi, S) \quad (21)$$

Se han aplicado diferentes criterios energéticos (ej, energía mínima por ciclo) tratando de obtener unos valores de φ, S compatibles con los resultados de la simulación numérica, no habiéndose obtenido una solución satisfactoria.

El análisis de los resultados numéricos pone de manifiesto que el deslizamiento oscila en torno a su valor medio con frecuencia 2ω y que la magnitud de dicha oscilación no es despreciable como lo era en el caso anterior. Consecuentemente, los términos de segundo armónico deben ser introducidos en (21) para obtener una solución analítica al problema del deslizamiento.

Por otra parte, lo comentado en el párrafo anterior indica que el fenómeno de acoplamiento de los motovibradores está asociado al comportamiento no lineal del sistema por intervenir de forma importante la componente de segundo armónico.

7.-Resultados de la integración numérica

Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante el preprocesador simbólico 3D_Mec (Refs [3] y [4]) se integran para unos valores concretos de los parámetros con ayuda del programa Matlab.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibración en cada uno de los ejes se han elegido con separación de una década (20 y 200 Hz para los ejes x e y respectivamente) con el fin de estudiar posibles analogías con la teoría básica de control.

Así, las figuras VI y VII representan los diagramas de amplitud y desfase (φ) de sucesivos regímenes estacionarios encontrados para el sistema en estudio en una serie de simulaciones en las que la frecuencia de sincronismo del grupo excitador se hace variar entre 10 y 1000 Hz.

Al margen de los valores de amplitud \bar{x}, \bar{y} obtenidos se aprecia que la figura VII está dividida en tres zonas, delimitadas por las frecuencias naturales del sistema excitado, en las que la dirección preferencial de excitación queda claramente definida ($\varphi_\infty=0$ para excitación sobre el eje horizontal y $\varphi_\infty=\pi$ para excitación sobre el eje vertical respectivamente).

Presumiblemente, los valores de φ_∞ para valores de ω anteriores a la primera frecuencia de resonancia ($\omega < 20$ Hz) serán menores que los representados puesto que, aunque el sistema no es capaz de alcanzar el estacionario en el tiempo de simulación establecido, el valor de φ_∞ tiende a 0 en esta zona.

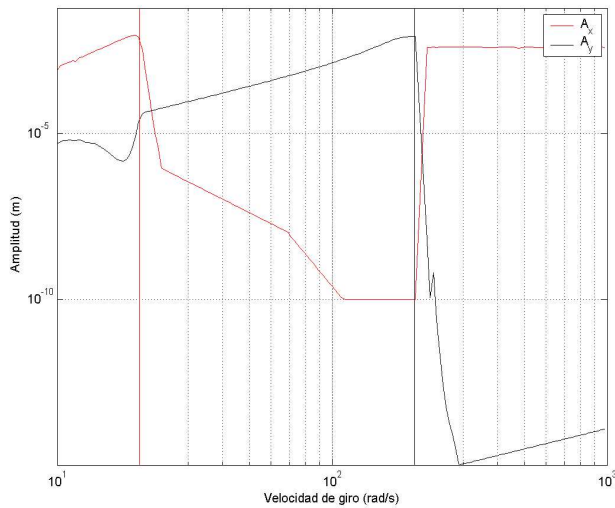


Figura VI: Amplitud de oscilación frente a ω

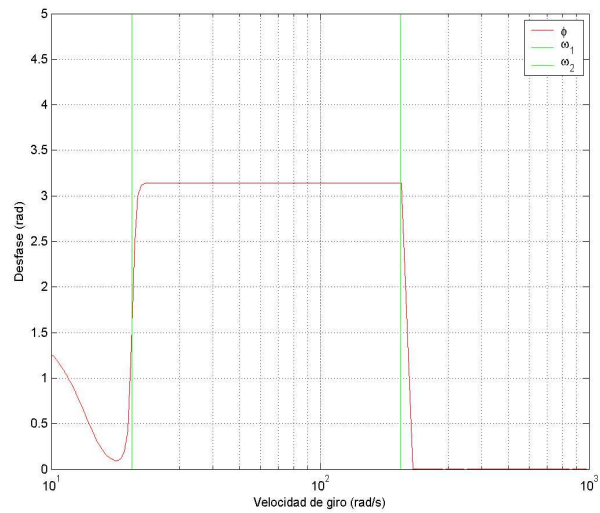


Figura VII: Desfase (ϕ) frente a ω

Por otra parte, se ha comprobado experimentalmente que las soluciones de estacionario no dependen de la posición inicial de las excéntricas salvo para valores muy concretos del ángulo ϕ_0 (0 y π concretamente).

7.-Conclusiones

Es posible, mediante un procedimiento mecánico, determinar la dirección preferencial de excitación del grupo excitador. El procedimiento numérico demuestra largos tiempos de estabilización del sistema a bajas frecuencias que han dificultado la automatización de la obtención del ángulo de sincronismo exacto en este rango.

Las soluciones analíticas de primer armónico no son suficientes para describir el fenómeno de autorregulación del grupo motor, lo que demuestra el carácter marcadamente no lineal del sistema con dos motovibradores y del fenómeno de acoplamiento en sí.

Por último, los resultados numéricos indican que las direcciones preferenciales de excitación del grupo excitador coinciden con las direcciones asociadas a los modos naturales de vibración del sistema excitado. Esta característica permite extrapolar fácilmente los resultados obtenidos para el sistema analizado a sistemas más generales.

Referencias

- [1] Jerry H. Ginsberg., "Mechanical and Structural vibrations, Theory and Applications" Ed. John Wiley and Sons 2001, ISBN : 0-471-37084-3.
- [2] I. Zabalza., "Síntesis Cinemática y Dinámica de Mecanismos" Tesis Doctoral, *Universidad Pública de Navarra, 1999.*
- [3] J. Ros et al., "3D_Mec: Un programa para el análisis numérico, simbólico y gráfico en mecánica vectorial y analítica (aplicaciones)", *Actas XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica (Tarrasa, Spain), 1998.*
- [4] 3D_Mec Home Page http://www.imem.unavarra.es/3d_mec/