

Modelo para la simulación del comportamiento dinámico de rotores flexibles con apoyos no lineales sobre una estructura no rígida

Heller G. Sánchez Acevedo⁽¹⁾, Jesús M. Pintor Borobia

*⁽¹⁾Facultad de Ingenierías y Arquitectura, Universidad de Pamplona, Colombia.
Actualmente: Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales,
Universidad Pública de Navarra, Edificio los Pinos, Campus de Arrosadia, CP 31006
Pamplona(España), Teléfono 948169697, Correo Electrónico
sanchez.44144@e.unavarra.es*

Resumen

Este trabajo presenta un planteamiento matemático para el análisis dinámico de rotores flexibles cuyos apoyos no están situados sobre una estructura necesariamente rígida. Utiliza el MEF para el estudio de la dinámica de rotores y la síntesis de componentes para introducir el comportamiento de la estructura sobre la que se apoya el rotor. El modelo matemático desarrollado calcula los parámetros modales y la respuesta en el estado estacionario y transitorio. Integra las ecuaciones utilizando el método de Newmark.

Palabras Clave: Dinámica de rotores flexibles, síntesis de componentes, no linealidad.

Abstract

This article presents a mathematical formulation based on FEM for the dynamic analysis of flexible rotors who are not grounded to a necessarily rigid structure. Furthermore, it uses the component synthesis in order to introduce the behaviour of the structure where the rotor is grounded. The developed mathematical model calculates the modal parameters and the transient and stationary response. The Newmark method is used for the integration..

Keywords: Flexible rotordynamics, component synthesis, non-linear.

1. Introducción

El análisis de rotores flexibles constituye un campo de investigación fundamental a la hora de acercarse al conocimiento del comportamiento dinámico de las máquinas rotativas en general. Así lo corroboran múltiples trabajos de investigación dedicados a

la labor de desarrollar la capacidad de descripción de la respuesta dinámica de aquellos, donde se han estudiado las ecuaciones fundamentales del movimiento del rotor, así como sus condiciones de contorno.

El análisis dinámico de rotores flexibles se ha abordado numéricamente mediante varios métodos, entre los cuales cabe destacar el Método de la Matriz de Transferencia [1] y el Método de los Elementos Finitos [2, 3], este último utilizado en el presente trabajo.

El MEF nació como un método de cálculo de estructuras y no tardó mucho en ser aplicado a problemas de naturaleza distinta, suponiendo un gran adelanto en el análisis de fenómenos físicos, entre ellos la dinámica de rotores flexibles. Ésta fue estudiada, inicialmente, a través de elementos sencillos compuestos por vigas a flexión y discos rígidos y posteriormente mediante la utilización de elementos complejos.

Entre los distintos fenómenos dinámicos propios de los rotores flexibles y que son incluidos en el presente modelo se encuentran el efecto giroscópico estudiado por Green [4] y Ditemberg [5] y el esfuerzo cortante que fue introducido en estos modelos por Timoshenko; la inercia rotatoria y diametral también fueron ampliamente estudiadas. Otros parámetros importantes tenidos en cuenta por algunos investigadores y considerados aquí son las cargas axiales, el peso, el amortiguamiento interno y los errores de montaje, como excentricidades o desalineamientos, que dan lugar a la aparición de fuerzas variables en el tiempo a consecuencia de la rotación.

Finalmente, se obtuvo un modelo matemático para la simulación del comportamiento dinámico de rotores flexibles que incluye todos los fenómenos mencionados anteriormente y además tiene en cuenta que la estructura soporte no tiene que ser necesariamente rígida, así como sus apoyos pueden ser no lineales.

2. Técnicas de Síntesis de Componentes

La modelización matemática en el presente trabajo, se realiza para los componentes principales: apoyos, elementos no necesariamente rígidos, que se denominan “estáticos” aún cuando estén sujetos a vibraciones, y elementos “rotativos”, ver Figura 1. Estos últimos presentan una problemática diferente que conduce a la utilización de técnicas distintas p

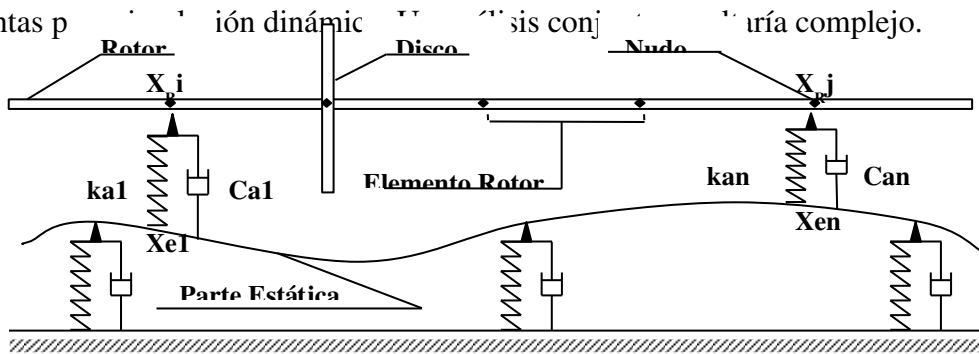


Figura 1. Representación simbólica del rotor y su acoplamiento a la estructura estática

Las técnicas de “Síntesis de Componentes” [6] permiten aprovechar los resultados obtenidos de la modelización independiente de ambos problemas, caracterizando la parte “estática”, que puede considerarse lineal, a través de sus parámetros modales obtenidos en el análisis modal experimental, para incluirla después en el modelo de la parte rotativa. Con esto se reduce la complejidad y el tamaño del problema dinámico.

3. Planteamiento Matemático

La modelización del rotor se ha llevado a cabo dividiéndolo en elementos de rotor, que definen la geometría del mismo a través de su longitud y diámetro, inicial y final, y que aportan rigidez, masa, inercia y amortiguamiento al sistema; estos elementos vienen definidos entre una serie de nudos. Cada nudo tiene cuatro grados de libertad, dos desplazamientos y dos giros, y en él puede situarse un disco que aporta masa e inercia, o

un apoyo que introduce unos esfuerzos como resultado de la interacción entre el rotor y la parte “estática”.

Se dedujeron, en primer lugar, las ecuaciones de equilibrio dinámico correspondientes al modelo completo, iniciando con las ecuaciones de movimiento asociadas al rotor mediante la aplicación del MEF [7]. Después, se plantearon las propias de la parte “estática” expresadas en función de los parámetros modales. Por último, la modelización matemática desarrollada con los apoyos facilitó la expresión de los esfuerzos que se introducen en el sistema completo “rotor-apoyos-parte estática” [8]. De esta forma, el acoplamiento del sistema de ecuaciones, -parte “estática” y rotor- se llevó a cabo a través de los esfuerzos de acción reacción en los apoyos del rotor.

Para la deducción de las ecuaciones de movimiento, se hace necesario el planteamiento de dos sistemas de coordenadas -uno fijo y otro solidario a la sección-. Se han obtenido las expresiones de la energía cinética, potencial y de la función de disipación del sistema en base a las coordenadas generalizadas, aplicando posteriormente las Ecuaciones de Lagrange.

Se han considerado cuatro grados de libertad por nudo: dos desplazamientos (V , W) y dos giros (B , C), que determinan el centro geométrico de la sección y su orientación, Figura 2. Las expresiones de la energía cinética y potencial del elemento rotor se han deducido interpolando los desplazamientos y velocidades para cualquier sección en función de los valores de los nudos extremos; estas funciones de interpolación son obtenidas a través de la Teoría de Viga de Timoshenko.

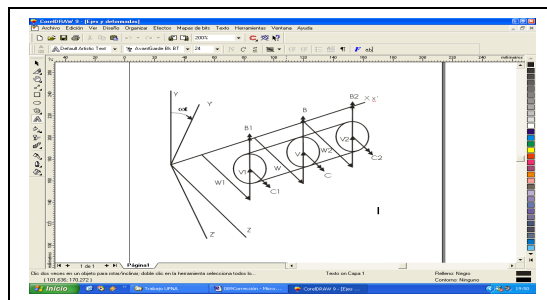


Figura 2. Elemento Finito de Rotor.

Teniendo en cuenta lo anterior, la energía cinética de un disco está expresada en la ecuación (1), donde el vector $\{\mathbf{q}\}$ son las coordenadas generalizadas, $[\mathbf{M}]$ la matriz de inercia, $\{\mathbf{V}\}$ el vector de descentramientos y $[\mathbf{H}]$ es una matriz que posteriormente dará lugar a la “matriz giroscópica”; también están presentes los momentos de inercia polar y diametral del disco.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{M}]^d \{\dot{\mathbf{q}}\} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_p \dot{\theta}^2 - \dot{\theta} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{H}]^d \{\mathbf{q}\} + \dot{\theta} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T \{\mathbf{V}\}^d \quad (1)$$

La energía cinética del elemento rotor se obtiene por integración de la Ecuación (1) y aplicando las funciones de interpolación al sistema [7]; destaca en este proceso la aparición de la expresión para las fuerzas generalizadas al considerar que el centro de gravedad de una sección cualquiera no tiene porqué estar situado en la línea neutra y cuyas coordenadas son J y K. De forma simplificada queda la Ecuación (2).

$$\mathbf{T}_{elemento} = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{M}]^e \{\dot{\mathbf{q}}\} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_p \dot{\theta}^2 - \dot{\theta} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{H}]^e \{\mathbf{q}\} + \dot{\theta} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T \{\mathbf{V}\}^e \quad (2)$$

siendo

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}^T; \quad [\mathbf{M}]^e = \int_0^L \mathbf{m}_e [\Psi/]^T [\mathbf{M}] [\Psi/] ds; \quad [\mathbf{H}]^e = \int_0^L [\Psi/]^T [\mathbf{H}] [\Psi/] ds;$$

$$\{\mathbf{v}\}^e = \int_0^L \mathbf{m}_e [\Psi/]^T \begin{Bmatrix} -\mathbf{K} \cos \theta - \mathbf{J} \sin \theta \\ \mathbf{J} \cos \theta - \mathbf{K} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ds; \quad [\mathbf{H}]^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_p & 0 \end{bmatrix};$$

La energía potencial del rotor puede obtenerse como la suma de la debida al momento flector (U_R), al esfuerzo cortante (U_T) y a la carga axial (U_A) como se expresa en la Ecuación (3) [7]; donde queda representada la rigidez debida al momento flector más el esfuerzo cortante $[\mathbf{K}]$ y la asociada a la carga axial $[\mathbf{A}]$.

$$\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_T + \mathbf{U}_A = \frac{1}{2} \{\mathbf{q}\}^T [[\mathbf{K}] + [\mathbf{A}]] \{\mathbf{q}\} \quad (3)$$

También se consideran las fuerzas gravitatorias, que suponen una modificación en la expresión de la energía potencial, agregando al sistema la Ecuación (4).

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{q}\}^T \{\mathbf{P}\} + \int_0^L \mathbf{m}_e \mathbf{g} (\mathbf{J} \text{sen } \theta + \mathbf{K} \text{sen } \theta) ds \quad (4)$$

Las expresiones del amortiguamiento tanto interno, producido en los elementos del rotor, como externo, que son introducidos por los apoyos y elementos del rotor, son obtenidas a través de la función de disipación de Rayleigh, donde se tienen en cuenta las coordenadas móviles y las matrices de amortiguamiento externo e interno, suponiendo esta última proporcional.

Agregando una coordenada más, común a todos los nudos (θ), el peso propio $\{\mathbf{P}\}$, acoplando las ecuaciones y aplicando Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento, Ecuación (5).

Las expresiones de la matriz $[\mathbf{G}]$ y $[\mathbf{R}]$ se pueden encontrar en [8] y, para un rotor de sección circular, la expresión matricial se resume en la Ecuación (6).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & -[\mathbf{H}][\mathbf{q}] + \{\mathbf{V}\} \\ \{-[\mathbf{H}][\mathbf{q}] + \{\mathbf{V}\}\}^T & \mathbf{I}_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}[\mathbf{G}] + [\mathbf{C}_e] + [\mathbf{R}][\mathbf{C}_i][\mathbf{R}]^T \mathbf{0} \\ \{-[\mathbf{H}][\mathbf{q}]\}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}\} \\ \{\dot{\theta}\} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] + [\mathbf{R}][\mathbf{C}_i][\dot{\mathbf{R}}]^T \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}^2 \{\mathbf{V}\} \\ \mathbf{PAR} \end{Bmatrix} - \{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \mathbf{PAR} \end{Bmatrix} - \{\mathbf{P}\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$[\mathbf{M}_R] \{\ddot{\mathbf{X}}_R\} + [\mathbf{C}_R] \{\dot{\mathbf{X}}_R\} + [\mathbf{G}_R] \{\dot{\mathbf{X}}_R\} + [\mathbf{K}_R] \{\mathbf{X}_R\} = \{\mathbf{F}_{Ri}\} + \{\mathbf{F}_{Re}\} \quad (6)$$

Siendo $[\mathbf{M}_R]$ la matriz de inercia, $[\mathbf{C}_R]$ la matriz de amortiguamiento, $[\mathbf{G}_R]$ la matriz giroscópica, $[\mathbf{K}_R]$ la matriz de rigidez, $\{\mathbf{X}_R\}$ el vector de coordenadas de los nudos del rotor y $\{\mathbf{F}_R\}$ las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Para la parte “estática” se plantean las ecuaciones en función de los parámetros modales obtenidos experimentalmente, Ecuación (7), que tiene en cuenta la masa, el amortiguamiento, la rigidez modal, su vector de coordenada modales $\{\eta_e\}$, la matriz de

modos de la parte “estática” [] y las fuerzas que actúan sobre la misma, tanto internas como externas.

$$[\mathbf{m}_e]\{\ddot{\eta}_e\} + [\mathbf{c}_e]\{\dot{\eta}_e\} + [\mathbf{k}_e]\{\eta_e\} = []^T\{\mathbf{f}_{ei}\} + []^T\{\mathbf{f}_{ee}\} \quad (7)$$

Por último, los apoyos incorporan al sistema unos esfuerzos no lineales, fruto de la interacción “rotor-apoyo-parte estática” y su valor será función del movimiento relativo entre las partes “rotativa y estática” [8].

Una vez caracterizada la parte estática a través de sus parámetros modales y la parte rotativa mediante el MEF, ecuaciones (6) y (7) respectivamente donde los vectores de fuerza corresponden a la suma de las fuerzas interiores y exteriores tanto para la ecuación de la parte “estática” como para la del rotor, se aplica la técnica de síntesis de componentes a través de las fuerzas de acción-reacción en los apoyos cuyo valor es igual pero de sentido contrario, Ecuación (8). Donde “Fa” es una función dependiente de las incógnitas

$$\{\mathbf{f}_{ri}\} = -\{\mathbf{f}_{ei}\} = \{\mathbf{F}_a(\mathbf{x}_R, \eta_e, \dot{\mathbf{x}}_R, \dot{\eta}_e)\} \quad (8)$$

el sistema de ecuaciones global queda resumido así Ecuación (9):

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_R] & [\mathbf{0}] & \{-[\mathbf{H}]\{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{V}\}\}^T \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}_e] & \{\mathbf{0}\} \\ \{-[\mathbf{H}]\{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{V}\}\}^T & \{\mathbf{0}\}^T & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}\} \\ \{\dot{\eta}_e\} \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{RB} + \mathbf{C}_{RB} & \overline{\mathbf{G}}_{BA} + \mathbf{C}_{BA} & [\mathbf{0}] \\ \overline{\mathbf{G}}_{AB} + \mathbf{C}_{AB} & \overline{\mathbf{G}}_{AA} + \mathbf{C}_{AA} + [\mathbf{C}_a] & -[\mathbf{C}_a] \\ [\mathbf{0}] & -[\]^T[\mathbf{C}_a] & [\mathbf{c}_e] + [\]^T[\mathbf{C}_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_B\} \\ \{\mathbf{q}_a\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] \\ \{\mathbf{0}\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{RB} & \overline{\mathbf{K}}_{BA} & [\mathbf{0}] \\ \overline{\mathbf{K}}_{AB} & \overline{\mathbf{K}}_{AA} + [\mathbf{k}_a] & -[\mathbf{k}_a] \\ [\mathbf{0}] & -[\]^T[\mathbf{k}_a] & [\mathbf{k}_e] + [\]^T[\mathbf{k}_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_A\} \\ \{\mathbf{q}_B\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{RBe} \\ \mathbf{f}_{RAe} \\ \mathbf{PAR} \end{bmatrix} - \{\mathbf{P}\} = \begin{bmatrix} -\theta^2\{\mathbf{v}\} \\ [\]^T\{\mathbf{f}_{ee}\} \\ \mathbf{PAR} \end{bmatrix} - \{\mathbf{P}\} \quad (9)$$

donde “[Ca] y [Ka]” son matrices banda correspondientes al amortiguamiento y rigidez de los apoyos.

4. Resolución del sistema de ecuaciones

El sistema se resuelve bajo tres hipótesis. En primer lugar planteando un problema de vibraciones libres, en el que se suponen nulas las fuerzas que actúan sobre el sistema y que constituye un problema de valores y vectores propios. Considerando apoyos lineales se plantea la solución de las ecuaciones del sistema dando como resultado valores complejos. En segundo lugar planteando un problema de vibraciones forzadas con fuerzas armónicas, consecuencia de descentramientos y desalineamientos del rotor. Constituye el análisis en régimen estacionario y se resuelve para dos supuestos -apoyos lineales y no lineales- [8]. Por último, planteando la presencia de fuerzas variables en el tiempo actuando sobre el sistema: conlleva obtener la respuesta en régimen transitorio integrando las ecuaciones del movimiento en el tiempo. Existen diferentes métodos de integración numérica y el método de Newmark, Ecuación (9), es el utilizado en el presente trabajo; por la naturaleza no lineal del problema, se aplica el método iterativo de Newton Raphson para linealizarlo.

$$\begin{aligned}
 \{\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\} &= \{\ddot{\mathbf{x}}_t\} + \{\Delta \mathbf{a}_0\} \\
 \{\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\} &= \{\dot{\mathbf{x}}_t\} + \Delta \{\dot{\mathbf{x}}_t\} + \{\Delta \mathbf{a}_1\} \\
 \{\mathbf{x}_{t+\Delta t}\} &= \{\mathbf{x}_t\} + \Delta \{\dot{\mathbf{x}}_t\} + \frac{\Delta^2}{2} \{\ddot{\mathbf{x}}_t\} + \{\Delta \mathbf{x}\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

5. Resultados

Las aplicaciones del modelo se realizaron bajo el supuesto de apoyos lineales para la resolución del problemas de valores y vectores propios. Sin embargo, la obtención de la respuesta para el sistema en el tiempo mantiene la hipótesis de comportamiento no lineal en los apoyos.

La topología del rotor analizado corresponde a una bomba vertical, helicocentrífuga, extraíble, monofásica.

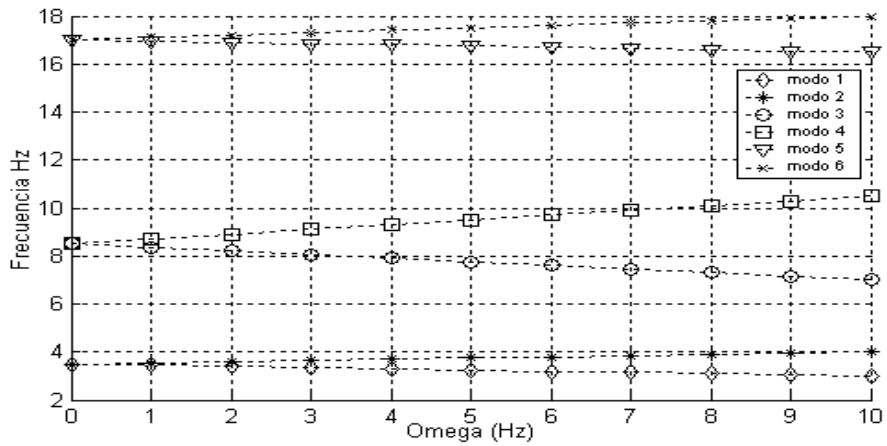


Figura 3. Variación de las frecuencias naturales con la frecuencia de giro

En las Figuras 3 y 4 se ha representado la variación de las frecuencias naturales de vibración, y de los correspondientes amortiguamientos modales en función de la velocidad de giro

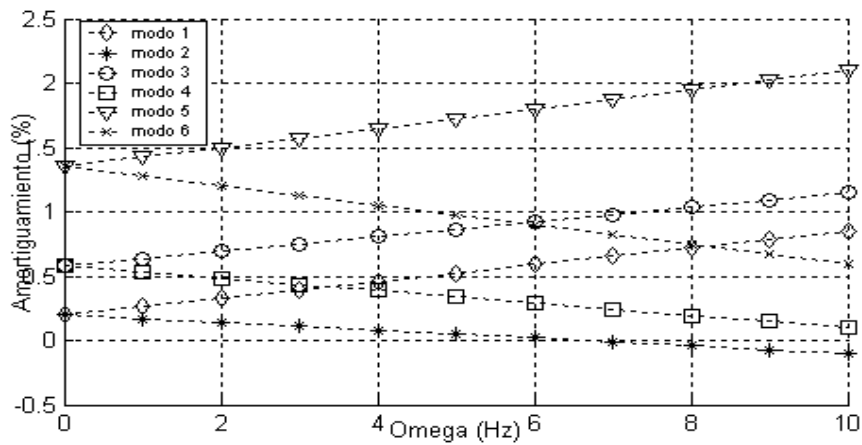


Figura 4. Variación del amortiguamiento con la velocidad de giro

La Figura 5 muestra la influencia de una variación en la rigidez aportada por los apoyos sobre las frecuencias naturales de vibración del rotor analizado.

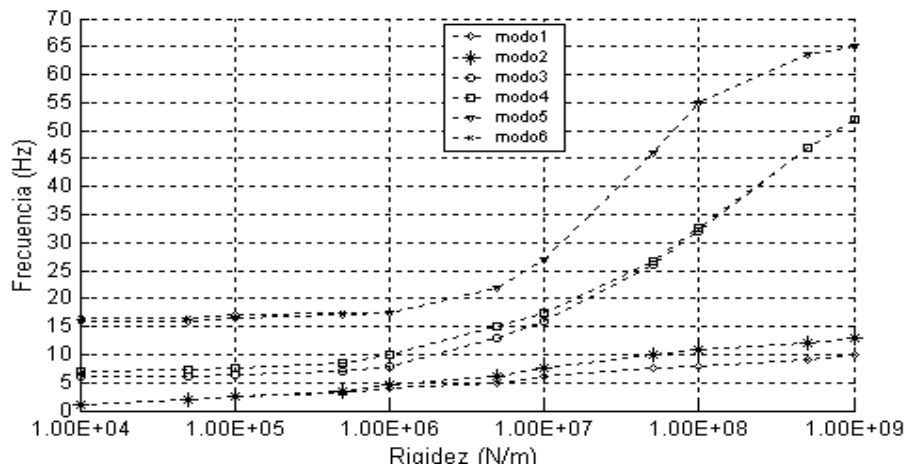


Figura 5. Variación de las frecuencias naturales con la rigidez de los apoyos

6. Conclusiones

Se han planteado las ecuaciones del movimiento del sistema “rotor-parte estática” y se ha desarrollado un modelo de cálculo para el análisis dinámico de rotores flexibles con apoyos no lineales y cuya estructura soporte no es necesariamente rígida.

El modelo calcula los parámetros modales y simula la respuesta en estado estacionario y transitorio teniendo o no en cuenta el propio peso, la carga axial y el carácter infinitamente rígido a torsión del rotor.

6. Referencias

1. J. Verhoeven, Shock and Vibrations Digest, Vol.(20) (1998), pág. 3-12.
2. J. Vinyolas, E. Vera, II Congreso de Ingeniería Mecánica, Sevilla, 1993.
3. K. Cavalca, Mechanical Systems and Signal Processing, Article in Press, (2004).
4. R. Green, Trans ASME, Vol.(70) (1984), pág. 396-376.
5. F. Ditemberg, Production Engineering Research Association, Londres, (1961).
6. M. Segura, J. Celigüeta, VII Congreso Nacional. De Ing. Mecánica, Valencia, (1998).

7. E. Vera, Estudio Dinámico de Rotores Flexibles, T. D., U. Navarra, S.S. (1998).
8. J. Pintor, Análisis de Comportamiento Dinámico de Bombas Hidráulicas Verticales, Escuela Superior de Ingenieros, San Sebastián, (1993).