

INFLUENCIA DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE COJINETES HIDRODINÁMICOS EN LA DINÁMICA DE ROTORES FLEXIBLES. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE.

Jesús María Pintor Borobia, Dr. I.I. - Dpto. de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales de la
Universidad Pública de Navarra.

Inés López Arteaga, I.I. - Centro de Estudios e Investigaciones Técnicas de Gipuzkoa (CEIT).

RESUMEN

La presencia de cojinetes hidrodinámicos constituye una de las principales fuentes de no-linealidad en el comportamiento dinámico de rotores flexibles. En este trabajo se estudia el carácter no-lineal de las fuerzas de origen hidrodinámico que tienen lugar en los cojinetes haciéndose referencia a su influencia sobre la respuesta dinámica de rotores flexibles.

Se ha desarrollado un modelo matemático que integra la ecuación de Reynolds, bajo la hipótesis de flujo laminar, permitiendo calcular la distribución de presiones que se establece en la película de fluido lubricante y, a partir de ahí, la resultante de los esfuerzos de reacción que tienen lugar en el cojinete. La magnitud y orientación de esta resultante dependerá - de forma no lineal - tanto del valor del descentramiento del rotor y de la velocidad de su centro de gravedad, como - en el caso de cojinetes ranurados - de la orientación de ambos parámetros.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la existencia de estados bi-estables en los que para un mismo valor de la resultante son posibles dos configuraciones de equilibrio distintas del rotor. Además, permiten comprobar que sistemas cuya respuesta bajo hipótesis de comportamiento lineal resultaría inestable derivan en una situación de vibraciones en ciclos límites, como consecuencia de ese carácter no-lineal de los cojinetes.

NOTACIÓN

ε	relación de excentricidad, e/c	R	radio del cojinete
λ	velocidad adimensional, $\dot{e}/\omega c$	W_{∞}	esfuerzo para cojinete de longitud infinita
e	excentricidad	W	esfuerzo para el cojinete de longitud finita
\dot{e}	velocidad del centro de gravedad del rotor	U	velocidad en la superficie del rotor
c	holgura radial		
ω	velocidad de giro		
α	orientación la excentricidad		
φ	orientación de e respecto a \dot{e}		
η	viscosidad		
θ	coordenada circunferencial		
z	coordenada axial		
t	tiempo		

h	espesor de película
h_{\max}	h en el punto de presión máxima
p	presión
p_{\max}	presión máxima
L	longitud del cojinete

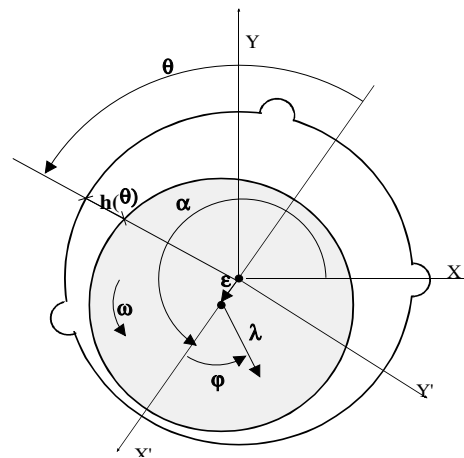


Figura 1

INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de rotores flexibles constituye un campo de investigación fundamental a la hora de acercarse al conocimiento del comportamiento dinámico de las máquinas rotativas en general. Así lo corroboran múltiples trabajos de investigación, la mayor parte orientados al estudio de rotores girando a altas velocidades y apoyados sobre una base rígida mediante cojinetes hidrodinámicos lubricados generalmente por aceite. Los altos valores en la viscosidad del lubricante y la velocidad de giro dan lugar a una importante rigidez en dichos cojinetes, evitando la aparición de fuertes desplazamientos del rotor y permitiendo considerar constantes las rigideces y amortiguamientos aportados por dichos apoyos, facilitando el desarrollo del correspondiente modelo lineal.

Existe una amplia bibliografía referida al estudio del comportamiento dinámico de rotores flexibles en las condiciones señaladas. Así, se estudia el efecto del esfuerzo cortante (Nelson, 1980 y Nelson y McVaugh, 1976), el del amortiguamiento sobre la estabilidad (Zorzi y Nelson, 1977), el de las características de rigidez y amortiguamiento asociadas a los soportes de los cojinetes (Dutt y Nakra, 1996) y tanto Vinyolas como Vera centran sus trabajos en el estudio de las velocidades críticas y la respuesta en el tiempo del rotor con la consideración de los efectos de cortante, inercia rotatoria, carga axial, amortiguamiento interno y efecto giroscópico (Vinyolas y Vera, 1983 y Vera, enero 1988).

El trabajo aquí presentado surge a partir de un proyecto de investigación de carácter más extenso centrado en el estudio dinámico y estructural de las bombas hidráulicas verticales (Pintor, diciembre 1993). El análisis del comportamiento dinámico del rotor de una bomba vertical presenta características interesantes (Bolleter y Marscher, mayo 1988) no consideradas en los trabajos mencionados. Así, la flexibilidad aportada por los apoyos es mayor que la asociada a otros cojinetes hidrodinámicos y, además, su característica de comportamiento resulta muy no-lineal. Ello es debido a la baja viscosidad del fluido lubricante (habitualmente agua), las relativamente importantes holguras radiales, la escasa velocidad de giro de estas bombas y la ausencia de cargas radiales de carácter permanente (como es el caso de los esfuerzos gravitatorios a flexión en las bombas de disposición horizontal). La necesidad de modelizar el comportamiento de ese tipo de apoyos para

posteriormente incorporarlos al modelo de cálculo del conjunto de la bomba condujo a un estudio específico de los mismos, algunos de cuyos resultados se ofrecen a continuación.

NO-LINEALIDAD DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE

La aproximación lineal al análisis dinámico del sistema mecánico rotor-cojinete resulta aceptable bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones elásticas; sin embargo, estos presupuestos no son siempre válidos. Así, aunque en todo diseño se pretenda minimizar las amplitudes de vibración de la máquina haciendo girar al rotor alrededor de su posición de equilibrio en situación de régimen, la presencia de fenómenos como el desequilibrio y el desalineamiento, o la existencia de fuentes de vibración alrededor de la propia máquina dan lugar a una realidad bien diferente.

En los sistemas rotor-cojinete constituidos por cojinetes hidrodinámicos, una de las principales fuentes de no-linealidad lo constituyen las fuerzas de reacción que tienen lugar en los apoyos del rotor (Chan y White, 1993), fuerzas ligadas a la película de lubricante que actúa en cada cojinete. Por regla general, el análisis no-lineal de estos casos se lleva a cabo mediante el desarrollo del correspondiente método numérico de integración de las ecuaciones del movimiento del sistema. Ello implica, no obstante, un importante esfuerzo computacional ya que la ecuación de Reynolds ha de ser evaluada en cada instante de tiempo. De cara a simplificar este cálculo se han desarrollado diferentes soluciones que permiten obtener, de forma aproximada, las fuerzas que tienen lugar en los cojinetes como una expresión algebraica dependiente de la posición y velocidad del eje con respecto al cojinete. Por regla general, la principal desventaja de este tipo de soluciones es que la mayoría sólo son válidas para el caso de cojinetes lisos (Vorts y otros, 1995), aunque en algunos casos se han llegado a desarrollar métodos analíticos extensivos también al caso de cojinetes ranurados (Cavalca y otros, 1994).

Otro método que permite evitar el tener que evaluar la ecuación de Reynolds en cada instante de tiempo consiste en resolver, previamente a la ejecución del problema, dicha ecuación para toda una matriz de puntos o valores de la excentricidad del rotor con respecto al cojinete, e interpolar posteriormente entre esos puntos para calcular los valores a considerar en cada instante. Ello supone un importante ahorro de esfuerzo de cálculo y permite abordar el problema de cojinetes tanto lisos como ranurados.

MODELO MATEMÁTICO PARA COJINETES HIDRODINÁMICOS

Como resultado del flujo de fluido lubricante inducido por la rotación del eje, se desarrolla una distribución de presiones de carácter hidrodinámico en la holgura existente entre el cojinete y el rotor que dará lugar a la correspondiente fuerza de reacción. Dicha presión viene descrita por la ecuación de Reynolds (1):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial(hU)}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (1)$$

Se ha desarrollado un modelo matemático que integra dicha ecuación, bajo las hipótesis de flujo laminar y viscosidad constante a lo largo del espesor de película de fluido lubricante (Cameron, 1966 y Raimondi y Boyd). Ello permite calcular la distribución de presiones que se establece en dicha película como consecuencia

de la cuña hidrodinámica entre rotor y cojinete y, a partir de ahí, la resultante de los esfuerzos de reacción que tienen lugar en el cojinete. La magnitud y orientación de esta resultante dependerá - de forma no lineal - tanto del valor del descentramiento del rotor y la velocidad de su centro de gravedad, como - en el caso de cojinetes ranurados - de la orientación de ambos parámetros.

La integración de esta ecuación se simplifica aplicando la aproximación de Boegli (Cameron, 1966), que considera que la variación de presión a lo largo de la circunferencia y en dirección axial son independientes entre sí y que la distribución de presiones en la circunferencia es la correspondiente a un cojinete de longitud infinita. La presión en dirección axial se evalúa en la sección de máxima presión, y la ecuación de Reynolds adopta la siguiente forma:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial (hU)}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad \text{donde } p = p(\theta) \quad (2)$$

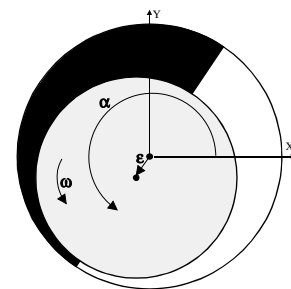
A su vez, la fuerza resultante obtenida a partir de esta distribución de presiones ha de multiplicarse por el correspondiente factor de corrección (3) para introducir la influencia de la longitud del cojinete.

$$\frac{W}{W_\infty} = 1 - \frac{2(1 - e^{-n})^2}{n(1 - e^{-2n})} \quad (3)$$

siendo:
$$n^2 = \frac{-M}{\left(\frac{R(\theta_{i+1} - \theta_i)}{L} \right)^2} \quad M = 6\eta\omega R^2 \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)^2}{p_{m\acute{a}x} h_{m\acute{a}x}^3} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)_{m\acute{a}x}$$

Partiendo de estas ecuaciones se ha obtenido una expresión analítica para la distribución de presiones en la película de fluido lubricante del cojinete, cuya deducción se resume en el Apéndice. El modelo matemático desarrollado permite caracterizar cojinetes con ranuras axiales - que dividen la superficie del cojinete en sectores denominados palieres - introduciendo en los parámetros de cálculo la orientación del vector descentramiento con respecto a dichas ranuras así como del vector velocidad del centro de gravedad del rotor con respecto al vector descentramiento (Figura 1).

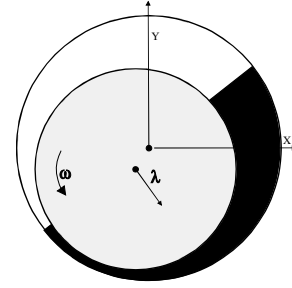
La hipótesis de cálculo considerada es la de presión nula en las ranuras, por lo que la distribución de presiones se calcula en cada palier por separado, obteniéndose su contribución a la fuerza de reacción. Posteriormente la suma vectorial de las mismas permitirá deducir el valor de la reacción resultante en el cojinete.. Dentro de cada palier, tanto las condiciones de contorno en presión como la presión de cavitación se consideran nulas; ya que su valor es despreciable frente a la máxima presión que se desarrolla en el mismo (Kryniski, 1991).



(a)

Por regla general - como consecuencia de la excentricidad -, la región del cojinete con presiones positivas está situada a lo largo del

semicírculo comprendido entre los puntos de máximo y mínimo espesor de película de fluido lubricante en el sentido de giro del rotor (Figura 2.a). Sin embargo, si se considera únicamente la influencia del vector velocidad del centro de gravedad del rotor, esta distribución se extiende en un semicírculo centrado alrededor de dicho vector (Figura 2.b). En el caso que nos ocupa, la consideración simultánea de ambos parámetros - los vectores excentricidad y velocidad del centro de gravedad - implica la imposibilidad de situar a priori la región de presiones positivas.



(b)

Figura 2

Partiendo de estas consideraciones, la determinación de las dos constantes de integración que aparecen en la expresión analítica de la distribución de presiones (ver Apéndice), se realiza en base a las hipótesis siguientes:

- Condiciones de contorno de *Half-Sommerfeld*: $p(\theta_i) = 0$ y $p(\theta_{i+1}) = 0$, en los extremos de cada palier.
- Si la distribución de presiones resultante es positiva a lo largo de un palier, se integra para calcular la correspondiente fuerza resultante.

$$\left(F_x\right)_i = RL \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p \cos \theta d\theta \quad \left(F_y\right)_i = RL \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p \sin \theta d\theta$$

- Si la presión cambia de signo a lo largo del palier, las condiciones de contorno de *Half-Sommerfeld* aplicadas dejan de ser válidas, lo que obliga a rehacer el cálculo de las constantes de integración empleando las condiciones de contorno de Reynolds; cuyo planteamiento depende del signo del gradiente de presiones (si la presión pasa de negativa a positiva, se aplica: $p(\theta^*) = 0$, $\partial p / \partial \theta \big|_{\theta^*} = 0$ y $p(\theta_{i+1}) = 0$; por el contrario, si el gradiente es negativo: $p(\theta_i) = 0$, $p(\theta^*) = 0$ y $\partial p / \partial \theta \big|_{\theta^*} = 0$, y a modificar los límites de integración de las expresiones anteriores.

APLICACIONES DEL MODELO DE CÁLCULO

El modelo descrito permite evaluar las fuerzas de reacción en el cojinete para toda una matriz cuadrimensional de puntos o valores de la excentricidad y la velocidad del centro de gravedad del rotor - tanto en módulo como en dirección -, para posteriormente interpolar entre estos puntos y calcular los valores de fuerza a aplicar en cada instante.

Basándose en dicho modelo, se incluye a continuación el análisis teórico de dos fenómenos presentes en la dinámica de rotores flexibles: la existencia de estados bi-estables en los que para un mismo valor - en módulo y dirección - de la resultante son posibles dos configuraciones de equilibrio distintas del rotor, y la comprobación

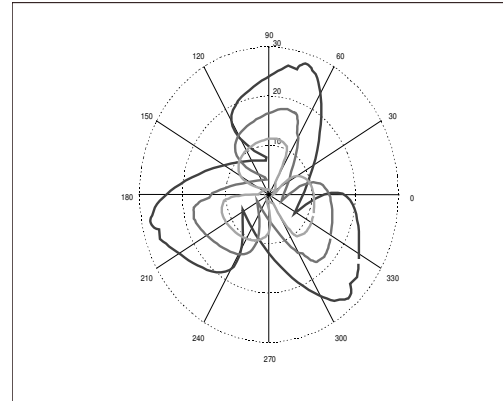
teórica de que sistemas cuya respuesta bajo hipótesis de comportamiento lineal resultaría inestable derivan en una situación de vibraciones en ciclos límites - como consecuencia de ese carácter no-lineal de los cojinetes -.

Estados bi-estables en cojinetes hidrodinámicos

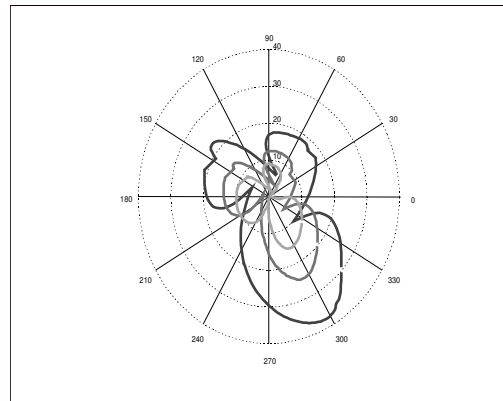
La capacidad de carga de un cojinete hidrodinámico puede estudiarse representando gráficamente la fuerza de reacción resultante en módulo y dirección para diferentes valores del descentramiento y de la velocidad del centro de gravedad del rotor (Kryniski, 1991). Dicha representación resulta muy útil a la hora de:

- Determinar si un cojinete será capaz de soportar unos determinados requerimientos de carga.
- Optimizar el diseño del cojinete orientándolo en la dirección de máxima capacidad de carga.
- Permitir anticipar la posición de equilibrio del cojinete bajo unas determinadas condiciones de carga.

En la Figura 3, se incluye el diagrama polar construido con los puntos extremos del vector reacción hidrodinámica resultante en un cojinete con tres ranuras distribuidas de forma uniforme, figura (a), y de forma no uniforme, figura (b), para un valor de la velocidad adimensional de 0.2, ángulo relativo entre esta y la excentricidad de valor $\pi/6$ y tres valores de excentricidad: 0.3, 0.4 y 0.5.



(a)



(b)

Figura 3 Diagramas de fuerzas

Observando la figura se advierte que curvas correspondientes valores de excentricidad diferentes se cortan, lo que implica que existen puntos en los que hay dos posibles posiciones del cojinete que dan lugar a una misma resultante -tanto en magnitud como en dirección -; es decir, se presentan dos posiciones distintas del sistema cojinete-rotor equivalentes desde el punto de vista dinámico. En tal caso, puede tener lugar lo que se conoce como "salto biestable" (bistable jump phenomenon) al saltar el rotor -debido a la vibración existente - de una posición a la otra (Kryniski, 1991, Zhu, 1991 y Zhu y otros, 1991).

Vibraciones en ciclos límite

El comportamiento no-lineal de los cojinetes y la existencia de unos desplazamientos máximos - holguras radiales -, hace que las rigideces y amortiguamientos efectivos aportados al sistema rotor-cojinete sean dependientes de la amplitud de vibración en ese punto y en ese instante. Como consecuencia, para un rotor dinámicamente inestable en una posición inicial centrada, al cabo de un transitorio se puede alcanzar una amplitud de vibración tal que la rigidez efectiva resultante en los cojinetes es suficiente para estabilizar el movimiento con un régimen de vibraciones en forma de ciclos límite. Así, sistemas que en base a un análisis lineal - que incluye la hipótesis de unas rigideces y amortiguamientos aportados por los cojinetes de valor constante - se prevé sean inestables, resultan tener un comportamiento en ciclos límites como consecuencia del carácter no-lineal de sus apoyos (Chan y White, 1993).

Para analizar este aspecto se ha tomado la topología de un rotor de una bomba helicocentrífuga, extraíble y monofásica (Figura 4), empleada habitualmente en el sistema de circulación del condensador de las centrales térmicas. En la figura 6, se muestra la simulación teórica de un arranque obtenido al integrar en el tiempo las ecuaciones del movimiento del rotor considerando la característica no-lineal de comportamiento de sus cojinetes. En las condiciones iniciales la bomba es linealmente inestable. Se incluye el transitorio asociado al arranque hasta la velocidad de régimen (5.5 cps) - unos 3.3 segundos - y el posterior mantenimiento de dicha velocidad. La Figura 5 representa el desplazamiento del nudo del rotor correspondiente al apoyo más inferior (junto al impulsor). El resultado es un régimen de vibraciones en forma de ciclos límite - de amplitud máxima ligeramente inferior a la holgura radial considerada en la definición del apoyo ($\cong 0.43$ mm) - la aparición de un fenómeno de resonancia hace que el rotor se deforme en mayor medida hasta alcanzar la situación de ciclos límites agotando prácticamente la holgura radial disponible en el cojinete -.

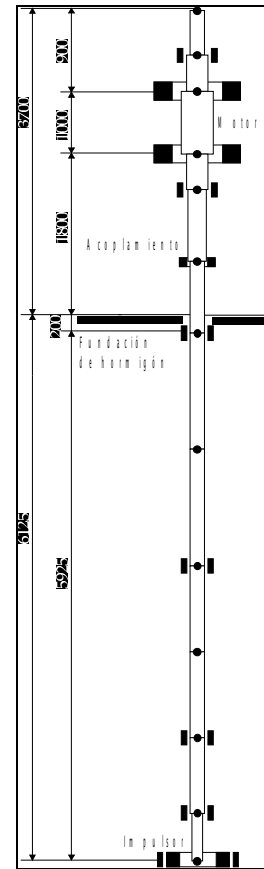


Figura 4 Rotor de una bomba vertical

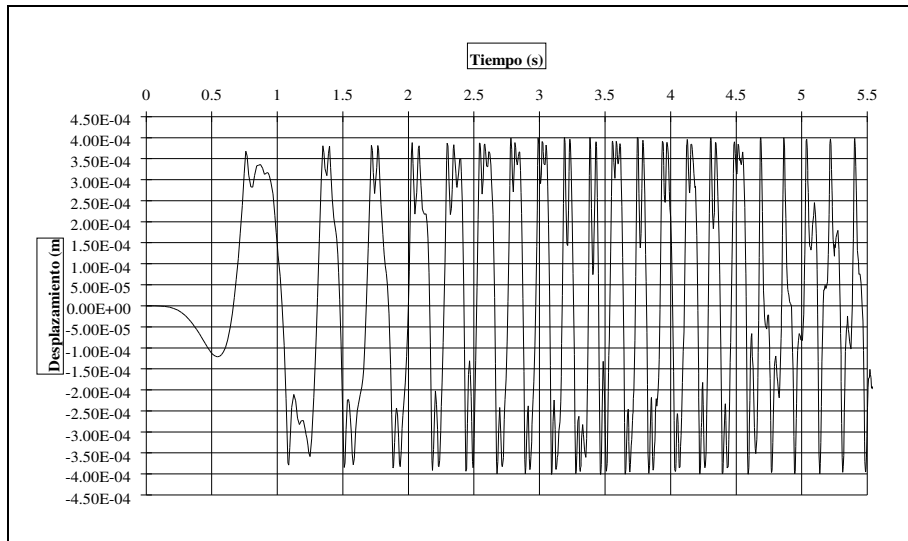


Figura 5 Arranque y régimen estacionario. Ciclos límites

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo para el cálculo de las fuerzas de reacción en cojinetes hidrodinámicos con ranuras axiales que considera la influencia tanto del módulo y la dirección del vector excentricidad, como del módulo y dirección del vector velocidad del centro de gravedad del rotor. El resultado es una matriz cuadrimensional que puede ser utilizada en simulaciones dinámicas para obtener, por interpolación, el valor de las fuerzas de reacción en los cojinetes en cada instante de tiempo.

El modelo matemático desarrollado permite justificar, desde un punto de vista teórico, la existencia de situaciones de biestabilidad en los cojinetes hidrodinámicos; situaciones caracterizadas por la concurrencia de dos configuraciones cinemáticas del sistema mecánico rotor-cojinete distintas con la misma resultante hidrodinámica.

La característica muy no-lineal de los cojinetes tiene un importante efecto en la respuesta dinámica del rotor. Con pequeñas excentricidades la rigidez aportada por los apoyos es muy baja y, en consecuencia, el rotor tiene un funcionamiento inestable para pequeños movimientos alrededor de su posición de equilibrio. No obstante, la característica no-lineal de los cojinetes estabiliza la respuesta dinámica del rotor para desplazamientos mayores en la forma de ciclos límites.

APENDICE: OBTENCION DE LA EXPRESION ANALITICA DE LA DISTRIBUCION DE PRESION

En la ecuación (2), la velocidad tangencial en la superficie del rotor, U , el espesor de película de fluido lubricante y su derivada respecto del tiempo vienen dados por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 U &= \omega R + (\lambda \omega c) \cos \varphi \sin \theta - (\lambda \omega c) \sin \varphi \cos \theta \\
 h &= c(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial t} = (\lambda \omega c) \cos \varphi \cos \theta + (\lambda \omega c) \sin \varphi \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Como resultado de sustituir (4) en (2) e integrar respecto de θ se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6\eta \omega R^2}{c^2} \left(\frac{\Phi(\theta) - \Phi(\bar{\theta})}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right)
 \tag{5}$$

siendo: $\Phi(\theta) = \varepsilon \cos \theta - \lambda \left[\frac{c\varepsilon}{2R} \sin(\varphi - 2\theta) + \left(\frac{c}{R} + 2 \right) \sin(\varphi - \theta) \right]$ y $\bar{\theta} =$ constante de integración

Integrando (5) respecto de θ , resulta una expresión para la distribución de presiones que toma la siguiente forma:

$$p = \frac{6\eta \omega R^2}{c^2} \left(\int \frac{\Phi(\theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} d\theta - \Phi(\bar{\theta}) \int \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} d\theta \right) + K
 \tag{6}$$

siendo K la segunda constante de integración.

Las dos constantes de integración en la ecuación (6) se determinan por el procedimiento ya explicado.

REFERENCIAS

- Bolleter, U. y Marscher, W. D. (mayo 1988), Vibration Short Course, Texas A&M 5th Int. Pump Symposium.
- Cameron, A. (1966), Principles of Lubrication, Longmans.
- Cavalca, K. L., Dedini, F. G., Piccoli H. C. y Weber, H. I. (1994), The Relevance of the Fluid-Dynamic Force Field Influence on the Behaviour of a Vertical Rotor with a Tilting Pad Journal Bearing, Mach. Vib., nº 3, 55-61.
- Chan, S.H. y White, M. F. (1993), The Effects of Nonlinearity on Rotordynamic Behaviour of Turbomachinery, Machine Vibration, nº 2, 1-13.
- Dutt, J. K. y Nakra, B. C. (1996), Stability Characteristics of Rotating Systems with Journal Bearings on Viscoelastic Support, Mech. Mach. Theory, vol 31, nº 6, 771-779
- Kryniski, K. (1991), Jumping Phenomenon in Journal Bearing, Rot. Mach. and Vehicle Dyns., vol. 35, 169-173.
- Nelson, H. D. (octubre 1980), A Finite Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design, vol.102, 793-803.
- Nelson, H. D. y McVaugh, J. M. (1976), The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, Journal of Eng. for Ind., vol.98, 593-600.

Pintor, J. M. (diciembre 1993), Análisis del Comportamiento Dinámico de Bombas Hidráulicas Verticales Utilizadas en Plantas de Producción de Energía. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastián.

Raimondi y Boyd, A Solution for the Finite Journal Bearing and its Application to Analysis and Design, Trans. ASLE, vol. 1, n° 1, 159.

Vera, E. (enero 1988), Estudio Dinámico de Rotores Flexibles. Tesis Doctoral, Univ. de Navarra, San Sebastián.

Vinyolas, J. y Vera, E. (1983), Análisis Dinámico de Rotores Flexibles Mediante el MEF, II Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Sevilla.

Vorst, E. L. B., Fey, R. H. B., de Kraker, A. y Campen, D. H. (1995), Steady-State Behaviour of Nonlinear Flexible Rotor-Bearing Systems: Part I- An Efficient Numerical Analysis Method, Mach. Vib., n° 3, 138-145.

Vorst, E. L. B., Fey, R. H. B., de Kraker, A. y Campen, D. H. (1995), Steady-State Behaviour of Nonlinear Flexible Rotor-Bearing Systems: Part II-Application: Influence of Cavitation Modelling, Mach. Vib., 3, 146-155.

Zhu, Ch. (1991), The Effect of Biastable Jump on the Reliability of the Squeeze Film Damper, Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, vol. 35, 245-249.

Zhu, Ch., Wang, X. y Fu, C. (1991), Investigation on the Biastable Jump in Subcritical Speed Range of Rotor Supported on Uncentralized Squeeze Film Dampers, Rotating Mach. and Vehicle Dynamics, vol. 35, 263-267.

Zorzi, E. S. y Nelson, H. D. (1977), Finite Element Simulation of Rotor Bearing Systems with Internal Damping, Journal of Eng. for Power, 71-76.