

# OPTIMIZACION DINAMICA DE UN CUADRILATERO ARTICULADO

I. Zabalza<sup>1</sup>, J.M. Pintor<sup>1</sup>, J.J. Gil<sup>1</sup>, J. Ros<sup>1</sup>, J.M. Jiménez<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosodía 31006 Pamplona, España, [izavi, txma, javier.gil, jros, josemanuel.jimenez]@unavarra.es  
Fax 34 948 169099

<sup>2</sup> Sport Training Technologies, S.L. Parque Empresarial Zuatzu, Edificio Easo 2ª planta, 20018 San Sebastián, España, jmjimenez@simtechniques.com

**Palabras clave:** Síntesis y análisis de mecanismos, Diseño de elementos de máquinas

**Resumen:** En este artículo se presenta la optimización de un mecanismo de manivela oscilador accionado por un motor eléctrico asíncrono. La optimización se basa en el estudio de la sensibilidad de la función objetivo respecto de las variables de diseño. La función objetivo se determina realizando una simulación dinámica del mecanismo. Finalmente se presenta un ejemplo numérico de optimización de un mecanismo manivela oscilador.

**Abstract.** In this paper the optimization of a crank-rocker mechanism driven by an asynchronous electrical motor is presented. The optimization is based on the analysis of the sensitivity of the objective function in relation to the design variables. The objective function is determined by performing a dynamic simulation of the mechanism. Finally a numerical example of crank-rocker mechanism optimization is presented.

## Optimización del mecanismo

Se pretende optimizar las dimensiones de un mecanismo manivela-oscilador (Fig. 1) en el que el eslabón seguidor, que es una plataforma de radio " $L_4$ ", debe realizar una oscilación " $\beta$ " con una relación entre el tiempo de la carrera de ida y la de retorno. El mecanismo se mueve por medio de un motor eléctrico asíncrono. El criterio para optimizar es que el par motor máximo durante un ciclo completo, es decir una vuelta completa de la manivela, sea mínimo, teniendo en cuenta que el par depende del deslizamiento del rotor respecto del campo magnético del motor. Las variables de diseño serán las longitudes del eslabón fijo " $L_1$ ", de la manivela " $L_2$ " y del eslabón acoplador " $L_3$ ".

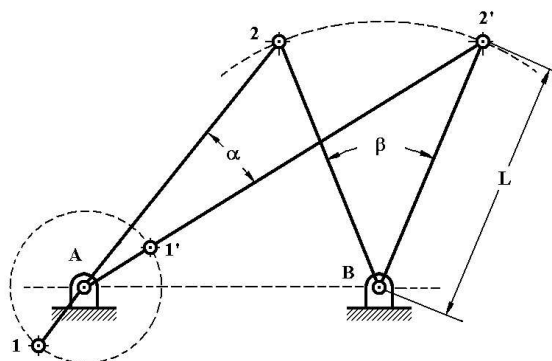


Fig. 1 Cuadrilátero articulado a optimizar.

El diseño óptimo de un mecanismo se inicia con la definición de la función objetivo que valora el funcionamiento del mecanismo, en este caso el par motor. La solución del problema será la configuración que minimice la función objetivo en relación con las variables de diseño.

Para optimizar este mecanismo se debe realizar una simulación dinámica de una vuelta completa de la manivela. En el punto donde el valor absoluto del par sea máximo, se determina la sensibilidad del par respecto de las variables de diseño y se varían éstas en el sentido que indique la sensibilidad.

La función objetivo depende de las variables de diseño no sólo de forma explícita, sino también implícitamente a través de los resultados del análisis cinemático y dinámico como: posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas.

Para la realización de la optimización del mecanismo se utilizarán las coordenadas naturales y se aplicará el método expuesto por García de Jalón y Bayo [1].

### Análisis Cinemático

La resolución del problema de optimización comienza por el estudio cinemático. Es decir, el cálculo de la posición, velocidad y aceleración de una serie de puntos característicos del mecanismo.

Sea “q” el vector de coordenadas naturales de los puntos característicos del mecanismo, “b” el vector de parámetros o variables de diseño y “Φ” el conjunto de restricciones geométricas que debe cumplir el mecanismo durante su funcionamiento.

Las restricciones geométricas del mecanismo se pueden escribir, de forma compacta, como:

$$\Phi(q, b, t) = 0 \quad (1)$$

La resolución del problema de posición consiste en determinar el vector “q” de coordenadas naturales que cumpla con las condiciones de restricción, para una determinada posición del eslabón de entrada.

Como las condiciones de restricción normalmente son no lineales, se utiliza en su resolución el método de linealización iterativo de Newton-Raphson. Con este método, se obtiene el vector de coordenadas naturales para una posición del mecanismo que cumple las restricciones geométricas, para una determinada posición del eslabón de entrada. Para iniciar el método de Newton-Raphson se debe partir de un vector de coordenadas naturales aproximadas.

Una vez resuelto el problema de posición, derivando las ecuaciones de restricción respecto del tiempo y suponiendo que los parámetros de diseño no varían con el tiempo, se obtiene:

$$\Phi_q \dot{q} + \Phi_t = 0 \quad (2)$$

ecuaciones que relacionan las velocidades de los puntos dados por las coordenadas naturales, para la posición determinada del mecanismo.

Volviendo a derivar las ecuaciones de restricción respecto del tiempo se obtiene:

$$\Phi_q \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q} + \dot{\Phi}_t = 0 \quad (3)$$

ecuaciones que relacionan las aceleraciones de los puntos dados por las coordenadas naturales, para la posición determinada del mecanismo.

En las ecuaciones (2) y (3) “ $\Phi_q$ ” y “ $\dot{\Phi}_q$ ” representan, la matriz jacobiana de las condiciones de restricción respecto de las coordenadas naturales y la derivada de esa matriz respecto del tiempo

respectivamente, “ $q$ ”, “ $\dot{q}$ ” y “ $\ddot{q}$ ” representan las posiciones, velocidades y aceleraciones de los puntos característicos del mecanismo, “ $\Phi_t$ ” representa la derivada explícita de las condiciones de restricción respecto del tiempo y “ $\dot{\Phi}_t$ ” la derivada implícita de la anterior respecto del tiempo.

### Análisis dinámico

Una vez resuelto el problema cinemático, se aborda el problema dinámico, que es el estudio de las ecuaciones que relacionan las masas con la cinemática del mecanismo y con las fuerzas.

Debido a que el conjunto de coordenadas naturales no son independientes, se introducen los multiplicadores de Lagrange en las ecuaciones que relacionan las masas con las fuerzas y las aceleraciones. Las ecuaciones para el estudio dinámico son:

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = Q \quad (4)$$

donde “ $M$ ” representa la matriz de masas, “ $\Phi_q^T$ ” la matriz jacobiana traspuesta, “ $\lambda$ ” el vector de los multiplicadores de Lagrange y “ $Q$ ” el vector de las fuerzas exteriores.

En el sistema (4) de “ $n$ ” ecuaciones, se tienen “ $(n+m)$ ” incógnitas: los “ $n$ ” elementos de vector de aceleraciones más los “ $m$ ” elementos del vector de los multiplicadores. Para poder resolver este sistema, se toman en consideración también las “ $m$ ” ecuaciones cinemáticas (3) del cálculo de las aceleraciones, formando así un sistema de “ $n+m$ ” ecuaciones con “ $n+m$ ” incógnitas, que se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ -\dot{\Phi}_q \dot{q} - \dot{\Phi}_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sistema de ecuaciones que sirve tanto para resolver el problema dinámico directo, en el que las incógnitas son las aceleraciones, como el dinámico inverso, en el que las incógnitas son las fuerzas.

### Simulación dinámica

En el problema dinámico directo, para poder hacer una simulación dinámica en el tiempo, partiendo de una posición y velocidad dadas, se van integrando numéricamente las ecuaciones dinámicas para obtener las nuevas velocidades y posiciones. No obstante, esta integración puede no converger a la solución real y puede ir violando cada vez más las condiciones de restricción geométricas y de velocidades.

En este caso, para evitar este problema se utiliza el método de estabilización de Baumgarte [2]:

- Tomando las ecuaciones de restricción (1) y su primera y segunda derivada respecto del tiempo, ecuaciones (2) y (3) respectivamente, se tendrá tres sistemas de ecuaciones, que esquemáticamente se pueden representar como:

$$\Phi = 0 \quad (6)$$

$$\dot{\Phi} = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{\Phi} = 0 \quad (8)$$

- Si se cumplen las condiciones de restricción de posición y de velocidad, “ $\Phi$ ” y “ $\dot{\Phi}$ ” serán iguales a cero, por lo que la ecuación (8) se puede escribir:

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha \dot{\Phi} + \beta^2 \Phi = 0 \quad (9)$$

- Si al ir realizando la simulación dinámica, se van violando las condiciones de restricción de posición o de velocidad, el sistema de ecuaciones (9) deja de cumplirse. En ese momento, los parámetros “ $\alpha$ ” y “ $\beta$ ” introducen una corrección, que hace que la integración converja a la solución real en la mayoría de los casos.
- Al introducir los parámetros “ $\alpha$ ” y “ $\beta$ ” propuestos por Baumgarte en la ecuación (5), el conjunto de ecuaciones cinemáticas y dinámicas queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ g \end{bmatrix} \quad (10)$$

siendo:

$$g = -\dot{\Phi}_q \dot{q} - \dot{\Phi}_t - 2\alpha(\Phi_q \dot{q} + \Phi_t) - \beta^2 \Phi \quad (11)$$

### Análisis de sensibilidad

Una vez resuelto el problema cinemático y dinámico del mecanismo, comienza la optimización, que consiste en minimizar o maximizar una cierta función objetivo que habrá definido el diseñador.

Para iniciar la optimización se realiza el análisis de sensibilidad propuesto por Chang y Nikravesh [3], que determina la variación de la respuesta del mecanismo en relación con la variación de los parámetros de diseño.

En el estudio de la sensibilidad se parte de las ecuaciones de restricción (1) y se deriva respecto de los parámetros de diseño, obteniéndose:

$$\Phi_q q_b + \Phi_b = 0 \quad (12)$$

ecuaciones de las que se determina el vector “ $q_b$ ” de sensibilidad de posición respecto de los parámetros de diseño, siendo “ $\Phi_b$ ” la matriz de derivadas de las ecuaciones de restricción respecto de los parámetros de diseño.

Derivando las ecuaciones que relacionan las velocidades (2) respecto de los parámetros de diseño se obtiene:

$$\Phi_q \dot{q}_b + \Phi_{qq} q_b \dot{q} + \Phi_{qb} \dot{q} + \Phi_{tq} q_b + \Phi_{tb} = 0 \quad (13)$$

ecuaciones donde “ $\Phi_{qq}$ ” y “ $\Phi_{qb}$ ” son hipermatrices, resultado de derivar la matriz jacobiana respecto de las coordenadas dependientes y de las variables de diseño respectivamente, y “ $\Phi_{tq}$ ” y “ $\Phi_{tb}$ ” son las matrices de derivadas respecto de las coordenadas dependientes y de las variables de diseño respectivamente, del vector “ $\Phi_t$ ”. Con estas ecuaciones se determina el vector “ $\dot{q}_b$ ” de sensibilidad de las velocidades respecto de los parámetros de diseño.

Derivando respecto de los parámetros de diseño las ecuaciones que relacionan las aceleraciones (3) se obtiene:

$$\Phi_q \ddot{q}_b + \Phi_{qq} q_b \ddot{q} + \Phi_{qb} \ddot{q} + \dot{\Phi}_{qq} q_b \dot{q} + \dot{\Phi}_{qb} \dot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q}_b + \dot{\Phi}_{tq} q_b + \dot{\Phi}_{tb} = 0 \quad (14)$$

ecuaciones que relacionan la sensibilidad de las aceleraciones respecto de los parámetros de diseño “ $\ddot{q}_b$ ”, donde “ $\dot{\Phi}_{qq}$ ”, “ $\dot{\Phi}_{qb}$ ”, “ $\dot{\Phi}_q$ ” y “ $\dot{\Phi}_{tq}$ ” representan las derivadas respecto del tiempo de matrices ya conocidas.

Tomando ahora la ecuación (4) de la dinámica del mecanismo y derivando respecto de los parámetros de diseño se obtiene:

$$M \ddot{q}_b + \Phi_q^T \lambda_b = Q_b + Q_q q_b + Q_q \dot{q}_b - M_b \ddot{q} - \Phi_{qq}^T q_b \lambda - \Phi_{qb}^T \lambda \quad (15)$$

ecuaciones que relacionan las sensibilidades cinemáticas con las de los multiplicadores de Lagrange y las fuerzas, y en las que “ $\lambda_b$ ” es la matriz de derivadas de los multiplicadores respecto de las variables de diseño, “ $Q_b$ ”, “ $Q_q$ ” y “ $Q_q$ ” son las matrices de derivadas de las fuerzas exteriores respecto de las variables de diseño, de las coordenadas y de las velocidades y “ $M_b$ ” es la hipermatriz de las derivadas de la matriz de masas respecto de las variables de diseño.

La ecuación anterior (15), junto con la de sensibilidad de aceleraciones (14) se puede escribir en forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{g} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde:

$$\bar{Q} = Q_b + Q_q q_b + Q_q \dot{q}_b - M_b \ddot{q} - \Phi_{qq}^T q_b \lambda - \Phi_{qb}^T \lambda \quad (17)$$

$$\bar{g} = - \Phi_{qq} q_b \ddot{q} - \Phi_{qb} \ddot{q} - \dot{\Phi}_{qq} q_b \dot{q} - \dot{\Phi}_{qb} \dot{q} - \dot{\Phi}_q \dot{q}_b - \dot{\Phi}_{tq} q_b - \dot{\Phi}_{tb} \quad (18)$$

Con el sistema de ecuaciones (16) se pueden obtener, en cada caso, distintas sensibilidades, dependiendo de cuales sean incógnitas.

Una vez se han obtenido las sensibilidades de posición, velocidad, aceleración, multiplicadores de Lagrange, masas y fuerzas exteriores respecto de los parámetros de diseño, se puede calcular la sensibilidad de la función objetivo respecto de dichos parámetros. Ello proporcionará información para saber cómo se deben variar los parámetros o variables de diseño con el fin de conseguir que la función objetivo sea máxima o mínima; bien paso a paso, o aplicando algoritmos de optimización.

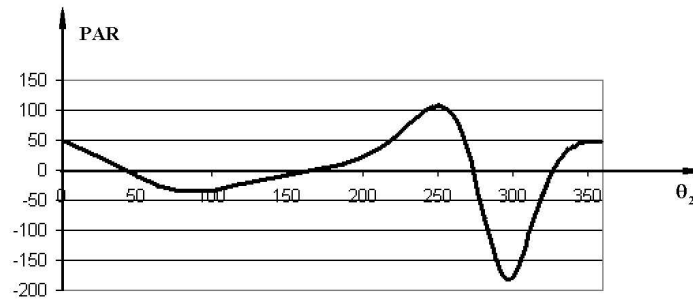
### Ejemplo numérico

En un ejemplo de optimización, realizado por Zabalza [4], de un mecanismo de manivela oscilador con un radio de la plataforma “ $L_4$ ” de 500 mm, un ángulo de oscilación de la plataforma “ $\beta$ ” de 45° y una relación de tiempos entre las carreras de ida y de retorno de 1,25, con unos eslabones de geometrías y masas determinadas y movido por un motor motor eléctrico asíncrono de 1,1 kW con un reductor de relación 25, se parte con unas variables de diseño “ $L_1= 513,4$  mm”, “ $L_2= 181,7$  mm” y “ $L_3= 389,7$  mm”.

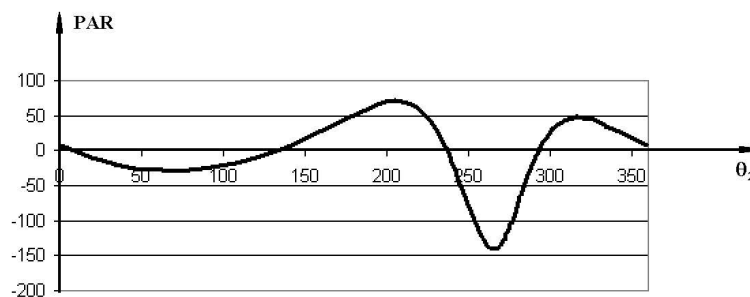
Al ejecutar una simulación dinámica con un mecanismo de estas dimensiones se obtiene un par máximo de  $-181,54 \text{ Nm}$ , (Fig. 2).

Calculando la sensibilidad del par respecto de las variables de diseño y modificando éstas cumpliendo las condiciones de restricción, hasta que la sensibilidad sea cero, se obtienen unas nuevas variables de diseño " $L_1= 0.5798 \text{ m}$ ", " $L_2= 0.1175 \text{ m}$ " y " $L_3= 0.8775 \text{ m}$ ".

Al realizar una simulación dinámica del mecanismo con las nuevas dimensiones se obtiene un par máximo de  $-135,83 \text{ Nm}$ , (Fig. 3).



**Fig. 2** Diagrama del par motor del mecanismo inicial.



**Fig. 3** Diagrama del par motor del mecanismo optimizado.

## Conclusiones

Se ha presentado la optimización de un mecanismo basado en el análisis de la sensibilidad de la función objetivo respecto de las variables de diseño. Se ha puesto como ejemplo numérico de optimización un mecanismo manivela oscilador, en el que aplicando el análisis de sensibilidad, se ha pasado de un par máximo de  $-181,54 \text{ Nm}$  a un par de  $-135,83 \text{ Nm}$  con una reducción del valor absoluto del par de un 33,65 %.

## Referencias

- [1] J. García de Jalón, y E. Bayo, "Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems", Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] J. Baumgarte, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, 1972, pp. 1-16.
- [3] C. O. Chang, and P. E. Nikravesh, , "Optimal Desing of Mechanical Systems with Constraint Violation Stabilization Method", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Desing, Vol. 107, 1985, pp. 493-498.
- [4] I. Zabalza, "Síntesis Cinemática y Dinámica de Mecanismos. Manipulador Paralelo 6-RKS", Tesis Doctoral, Universidad Pública de Navarra, España, 1999.