

# Programa para el Análisis Dinámico de Rotores Flexibles situados sobre Apoyos Móviles de Característica de Comportamiento No Lineal

J.M. PINTOR BOROBIA, J. ROS GANUZA, I. ZABALZA VILLAVA

Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales, Universidad Pública de Navarra.

Campus de Arrosadía s/n, 31006, Pamplona, España.

([txma@upna.es](mailto:txma@upna.es))

## RESUMEN

Se ha desarrollado, e implementado en un programa informático, la formulación matemática de un modelo de cálculo para analizar el comportamiento dinámico de rotores flexibles con apoyos de comportamiento no lineal y cuya estructura soporte no sea necesariamente rígida.

Se han modelizado matemáticamente los apoyos, elementos "estáticos" (aunque sujetos a vibraciones) y "rotativos", que presentan una problemática diferente que conduce a la utilización de técnicas distintas para su simulación dinámica. Los elementos rotativos sufren esfuerzos de inercia debidos a efectos giroscópicos y desequilibrios, y excentricidades y desalineamientos generan esfuerzos variables en el tiempo. Se han aplicado técnicas de "síntesis de componentes" para aprovechar los resultados obtenidos de la modelización independiente de ambos problemas: caracterizando la "parte estática" mediante sus parámetros modales para incluirlos en el estudio de la "parte rotativa". El acoplamiento se ha realizado a través de los esfuerzos de acción-reacción que introducen los apoyos del rotor. Planteadas las ecuaciones del movimiento, el modelo permite obtener sus parámetros modales y simular el comportamiento en régimen estacionario o transitorio.

## ABSTRACT

An informatic program based on a developed Calculation Model for the analysis of the dynamic behaviour of flexible rotors is presented. This Calculation Model would allow the proper representation of the flexibility of the non-rotating part of the rotating machines along with the non-linear characteristics on the flexible rotor and its supports.

## 1. Introducción

El análisis dinámico de rotores flexibles constituye un importante campo de investigación para acercarse al conocimiento del comportamiento de las máquinas rotativas en general. El efecto de la inercia rotatoria y diametral en las frecuencias naturales del rotor ya fue estudiado por Rayleigh /1/, en 1896, y Timoshenko /2/ añadió a este planteamiento el esfuerzo de cortante. La influencia de los efectos giroscópicos en las velocidades críticas del rotor ha sido ampliamente estudiada por

Green /3/, Ditemberg /4/ y Eshleman y Eubanks /5/, por mencionar algunos. Por su parte, Amitabha /6/ estudia con modelos sencillos el efecto de la fricción y amortiguamiento internos, la anisotropía del eje y la película de lubricante en los apoyos, mientras otros autores como Rao /7/ han presentado publicaciones parecidas y Den Hartog /8/ estudia el efecto de la anisotropía del eje.

También el MEF ha sido aplicado a la dinámica de rotores. Nelson /9/, /10/ para estudiar el efecto del cortante, Zorzi y Nelson /11/ el efecto del amortiguamiento sobre la estabilidad, y Vinyolas /12/ y Vera /13/ para analizar las velocidades críticas y la respuesta en el tiempo del rotor con la consideración de los efectos de cortante, inercia rotatoria, carga axial, amortiguamiento interno y efecto giroscópico.

Sin embargo, el problema aquí analizado recoge /14/ ciertas particularidades no presentes en los estudios citados: el carácter no lineal de los apoyos de la "parte rotativa" y la flexibilidad de la "parte estática" que les sirve de soporte. Con ese objetivo, se ha desarrollado la formulación matemática de un modelo de cálculo para analizar el comportamiento dinámico de rotores flexibles con apoyos no lineales y estructura soporte no necesariamente rígida. Se han modelizado matemáticamente los componentes principales: apoyos, elementos que se denominarán "estáticos", aun cuando estén sujetos a vibraciones, y elementos "rotativos". Estos últimos presentan una problemática diferente que conduce a la utilización de técnicas distintas para su simulación dinámica. Así, sufren esfuerzos de inercia producidos por efectos giroscópicos y desequilibrios; además, errores de montaje como excentricidades o desalineamientos dan lugar a la aparición de esfuerzos variables en el tiempo, consecuencia de la rotación.

Un análisis conjunto resultaría excesivamente complejo. Las técnicas de "síntesis de componentes" /15/ y /16/ permiten aprovechar los resultados obtenidos de la modelización independiente de ambos problemas caracterizando la parte "estática" por sus parámetros modales - obtenidos en el análisis modal -, para incluirlos en el modelo de la parte "rotativa". Se reduce así la dificultad y tamaño del problema al aprovechar la linealidad de la parte "estática" que, por su geometría, suele ocasionar mayores problemas de modelización. La parte "rotativa", por su parte, pese a introducir un carácter no lineal mayor, resulta más sencilla de modelizar.

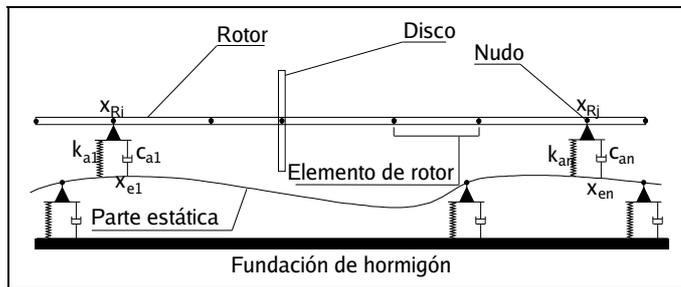


Fig. 1. Esquema del rotor y su acoplamiento a la "parte estática"

El rotor se ha modelizado (Fig. 1) dividiéndolo en elementos de que definen la geometría con su longitud y diámetro, inicial y final, y aportan rigidez, masa, inercia y amortiguamiento al sistema.

Los elementos vienen definidos por los nudos -con cuatro grados de libertad (g.d.l.): dos desplazamientos y dos giros- en los que puede situarse un disco, que aporta masa e inercia, o un apoyo, que introduce unos esfuerzos como resultado de la interacción entre el rotor y la "parte estática".

El acoplamiento de las ecuaciones de rotores flexibles (1) con las ecuaciones de la "parte estática" (2), expresadas en función de sus parámetros modales,

$$[M_R] \cdot \{\ddot{x}_R\} + [C_R] \cdot \dot{\theta} \cdot [G_R] \cdot \{\dot{x}_R\} + [K_R] + \dot{\theta} \cdot [\hat{C}_R] \cdot \{x_R\} = \{F_R\} \quad (1)$$

$$[m_e] \{\ddot{\eta}_e\} + [c_e] \{\dot{\eta}_e\} + [k_e] \{\eta_e\} = [\Phi]^T \{f_{ei}\} + [\Phi]^T \{f_{ee}\} \quad (2)$$

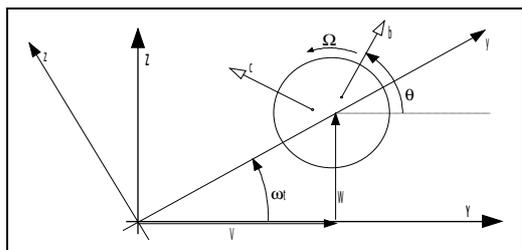
se realiza a través de los esfuerzos de acción-reacción en los apoyos del rotor. La representación simbólica del acoplamiento viene dada por la Fig. 1, donde  $x_{Ri}$ ,  $x_{Rj}$  son las coordenadas de los nudos  $i$ ,  $j$  del rotor y  $x_{e1}$ ,  $x_{en}$  las de los nudos 1 y  $n$  de la parte estática (asociados a los apoyos 1 y  $n$ ).

## 2. Planteamiento matemático

Deducidos y acoplados ambos sistemas de ecuaciones, se han desarrollado los métodos de cálculo necesarios para su resolución bajo tres situaciones:

- Suponiendo nulas las fuerzas que actúan sobre el sistema. La resolución, así planteada, se convierte en un problema de valores y vectores propios.
- Considerando armónicas las fuerzas que actúan sobre el sistema, lo que equivale al análisis del comportamiento del rotor en régimen estacionario.
- Admitiendo la hipótesis de unas fuerzas exteriores cualesquiera, obteniendo la respuesta en el tiempo -transitorios- del sistema "rotor-parte estática".

Para plantear las ecuaciones de un rotor flexible de sección circular, isótropo y rígido a torsión, se han obtenido las expresiones de las energías cinética y potencial y de la función de disipación del sistema en base a las coordenadas generalizadas, aplicando posteriormente las ecuaciones de Lagrange. Se han establecido tres sistemas de referencia (Fig. 2):

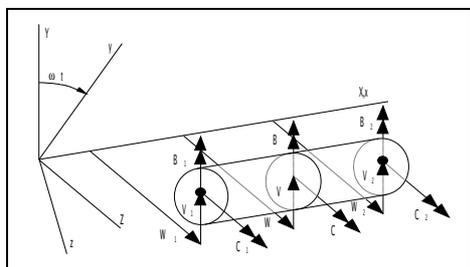


**Fig. 2.** Sistemas de referencia

- F: (X, Y, Z): Sistema fijo, con el eje "X" coincidente con la línea de centros de gravedad del rotor parado.
- R: (x, y, z): "x" coincide con la línea de centros de gravedad del rotor parado, y los ejes "y" y "z" se definen a partir de F con una rotación ( $\omega t$ ) alrededor de "x".

- D: (a, b, c): "a" perpendicular a la sección del rotor y "b" y "c" solidarios con ella. Se puede obtener a partir del F mediante una serie de rotaciones, /17/ y /18/. De cara a la formulación de las ecuaciones interesa tomar "a", "b" y "c" de modo que sean principales de inercia. Si la intersección entre la sección del disco y la línea de deformada neutra no coincide con el centro de gravedad de la sección (G) se definen las coordenadas de G en el sistema (a,b,c): (0,  $J_d$ ,  $K_d$ )

Se han considerado cuatro gdl por nudo: dos desplazamientos (V,W) y dos giros (B,C) -que determinan el centro geométrico de la sección y su orientación- (Fig. 3). Las expresiones matriciales de la energía cinética y potencial del elemento rotor se han deducido interpolando los desplazamientos y velocidades de cualquier sección en función de los valores asociados a los nudos extremos. Analizados los discos y elementos del rotor, se han ensamblado las matrices y aplicado Lagrange para obtener la expresión matricial del sistema de ecuaciones de movimiento del rotor.



**Fig. 3.** Elemento finito de rotor.

G.D.L. de los nudos extremos y de una sección arbitraria

La Fig. 2 permite distinguir la velocidad de giro del rotor ( $\Omega = \dot{\theta}$ ) de la velocidad de combadura o precesión ( $\omega$ ) -velocidad de giro de los ejes móviles-.

Llamando al vector  $\{q\} = \{V \ W \ B \ C\}^T$  "coordenada generalizada q" de los nudos, la energía cinética del disco se puede expresar matricialmente /19/:

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M]^d \{q\} + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 - \dot{\theta} \{q\}^T [H]^d \{q\} + \dot{\theta} \{q\}^T \{V\}^d \quad (3)$$

donde  $[M]^d$  es la "matriz de masas"  $\{V\}^d$  el "vector de descentramientos" y  $[H]^d$  una matriz que dará lugar, posteriormente, a la "matriz giroscópica":

$$[M]^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad [H]^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad \{V\}^d = m_d \cdot \begin{Bmatrix} -K_d \cos \theta - J_d \sin \theta \\ J_d \cos \theta - K_d \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

y siendo  $m_d$ ,  $I_p$  e  $I_D$  la masa y los momentos de inercia polar y diametral del disco.

La energía cinética de un elemento de rotor se obtiene por integración de (3), interviniendo la masa por unidad de longitud ( $m_e$ ), los momentos de inercia  $g_D$  y  $g_p$ , diametral y polar por unidad de longitud, y el descentramiento del rotor en cada sección. Al considerar que el centro de gravedad de una sección cualquiera no tiene que estar situado en la línea neutra, aparece un término que, derivado con respecto a  $q$  y cambiado de signo, se convertirá en la expresión de las fuerzas generalizadas.

Aplicando la teoría de Timoshenko para la flexión de vigas /20/ mediante un coeficiente ( $k$ ) que permite considerar que el cortante no es constante a lo largo de la sección, la integración se extiende a lo largo de la longitud del elemento y los vectores  $\{V_i \ W_i \ B_i \ C_i\}^T = \{q_i\}$  se corresponden con los de una sección arbitraria (Fig. 3), pudiéndose expresar, mediante la "matriz de funciones de interpolación"  $[\psi/\phi]$  /21/, en función de los nudos extremos del elemento  $\{V_1 \ W_1 \ B_1 \ C_1 \ V_2 \ W_2 \ B_2 \ C_2\}^T = \{q\}$

$$\{V \ W \ B \ C\}^T = \{q_i\} = [\psi/\phi] \cdot \{q\} \quad (5)$$

A partir de (3), la expresión de la energía cinética del elemento de rotor será /22/:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{Bmatrix} ds - \int_0^L \dot{\theta} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ W \\ B \\ C \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2} \int_0^L g_p \dot{\theta}^2 ds + \int_0^L m_e \dot{\theta} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -K \cos \theta - J \sin \theta \\ J \cos \theta - K \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ds \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6) queda, de forma simplificada:

$$T_{\text{elemento}} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M]^e \{q\} + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 - \dot{\theta} \{q\}^T [H]^e \{q\} + \dot{\theta} \{q\}^T \{V\}^e \quad (7)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 [M]^e &= \int_0^L [\psi/\phi]^T [M][\psi/\phi] ds & [H]^e &= \int_0^L [\psi/\phi]^T [H][\psi/\phi] ds \\
 \{V\}^e &= \int_0^L m_e [\psi/\phi]^T \begin{Bmatrix} -K \cos \theta - J \sin \theta \\ J \cos \theta - K \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ds & & (8)
 \end{aligned}$$

La energía potencial del rotor ( $U^e$ ) -/23/ y /24/- puede descomponerse en la debida al momento flector ( $U_R$ ), la debida al cortante ( $U_T$ ) y la debida a la carga axial ( $U_A$ ):

$$U_B^e + U_T^e + U_A^e = \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [[K'] + [A]] \cdot \{q\} \quad (9)$$

donde  $[K']$  incluye la rigidez debida al momento flector más el esfuerzo cortante y  $[A]$  la asociada a la carga axial. De forma simplificada, (9) puede expresarse:

$$\boxed{U_{\text{elemento}} = \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\}} \quad (10)$$

Por lo que se refiere al amortiguamiento, puede ser externo e interno. El externo lo introducen los apoyos y elementos del rotor, provocado por la resistencia del aire o del fluido que rodee al rotor. De cara al planteamiento de las ecuaciones de Lagrange, se ha tomado en consideración la función de disipación de Rayleigh:

$$D_e = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [C_e] \cdot \{\dot{q}\} \quad (11)$$

donde  $[C_e]$  es la matriz de amortiguamiento externo del rotor, suma del amortiguamiento de los apoyos más el de los elementos.

El interno se produce de forma exclusiva en los elementos del rotor y resulta ser:

$$D_i = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{p}\}^T \cdot [C_i] \cdot \{\dot{p}\} \quad (12)$$

donde  $\{p\}$  son las coordenadas móviles y  $[C_i]$  la matriz de amortiguamiento interno del rotor, que se ha supuesto proporcional:  $[C_i] = \alpha_0 \cdot [M] + \alpha_1 \cdot [K]$

Siendo  $L$  la Lagrangiana del sistema ( $L = T - U$ ),  $D$  la función de disipación de Rayleigh, y  $\{q\}$  el vector de coordenadas generalizadas (cuatro por nudo -V, W, B y C- y una coordenada más - $\theta$ -, común a todos los nudos), las ecuaciones del movimiento del rotor se obtendrán aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (13)$$

Acoplando las expresiones obtenidas para la energía cinética y potencial (3), (7) y (10) y aplicando (13) se obtienen las ecuaciones del movimiento del rotor /25/:

$$\left[ \begin{array}{cc} [M] & \{-[H]\{q\} + \{v\}\} \\ \{-([H]\{q\}) + \{V\}\}^T & I_p \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{q}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} -\dot{\theta}[G] + [C_e] + [R][C_i][R]^T & \{0\} \\ \{-([H]\{q\})\}^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{q\} \\ \{\theta\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} [K] + [R][C_i][\dot{R}]^T & \{0\} \\ \{0\}^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{q\} \\ \{\theta\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\theta}^2 \{V\} \\ \text{PAR} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{F\} \\ \text{PAR} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Donde  $\{F\}$  recoge las fuerzas ejercidas sobre cada nudo como consecuencia del descentramiento del centro de gravedad y se obtiene derivando con relación a  $\{q\}$  la energía cinética debida al descentramiento,  $I_p$  es la inercia polar del rotor,  $[G]$  es la matriz ensamblada de las  $[G^e]$  asociadas a cada elemento  $[G^e] = [H^e] - [H^e]^T$  y  $[R]$  es:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

tal que cuando el rotor es de sección circular, se comprueba /26/ que:

$$[R] \cdot [C_i] \cdot [R]^T = [C_i] \quad [R] \cdot [C_i] \cdot [\dot{R}]^T = \dot{\theta} \cdot [\hat{C}] \quad (16)$$

De forma resumida, la ecuación matricial (14) puede expresarse:

$$[M_R] \{\ddot{x}_R\} + [C_R] \{\dot{x}_R\} + [\bar{G}_R] \{x_R\} + [\bar{K}_R] \{x_R\} = \{F_R\} \quad (17)$$

siendo  $[M_R]$  la matriz de inercia del rotor,  $[C_R]$  su matriz de amortiguamiento (externo e interno),  $[\bar{G}_R]$  la matriz giroscópica  $[\bar{G}_R] = -\dot{\theta} \cdot [G_R]$ ,  $[K_R]$  la matriz de rigidez  $[\bar{K}_R] = [K_R] + \dot{\theta} \cdot [\hat{C}_R]$ ,  $\{x_R\}$  el vector de coordenadas de los nudos del rotor y  $\{F_R\}$  las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Por lo que a la "parte estática" se refiere, su sistema de ecuaciones expresado en función de los parámetros modales del Análisis Modal de la misma adopta la forma:

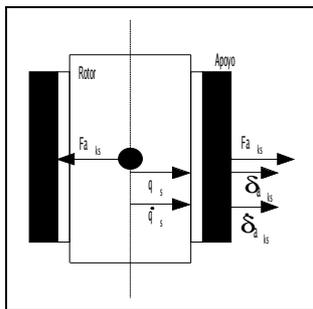
$$[m_e] \{\eta_e\} + [c_e] \{\dot{\eta}_e\} + [k_e] \{\eta_e\} = -[\Phi]^T \{F_{ie}\} + [\Phi]^T \{F_{ee}\} \quad (18)$$

donde  $[m_e]$ ,  $[c_e]$  y  $[k_e]$  son matrices diagonales,  $[\Phi]$  es la matriz de modos de la parte "estática",  $\{\eta_e\}$  su vector de coordenadas modales y  $\{F_e\}$  el vector de fuerzas que actúan sobre la parte "estática".

Los apoyos incorporan al sistema unos esfuerzos no lineales, fruto de la interacción "rotor-apoyo-parte estática", y cuyo valor será función /12/ del movimiento relativo entre las partes "rotativa" y "estática"- y puede expresarse para el nudo "i":

$$\{F_{a_i}\} = \{F_{a_i}(x_R^i - x_e^i, \dot{x}_R^i - \dot{x}_e^i)\} \quad (19)$$

A la fuerza introducida por el apoyo "k" en la dirección "s" -asociada al gdl "q<sub>s</sub>" del rotor- se la denominará "F<sub>a<sub>ks</sub></sub>" y su valor dependerá del desplazamiento y velocidad relativas entre el apoyo -como elemento participante de la parte estática- y el rotor:



$$\mu_{ks} = q_s - \delta a_{ks} \quad \dot{\mu}_{ks} = \dot{q}_s - \dot{\delta} a_{ks}$$

siendo  $\delta a_{ks}$  y  $\dot{\delta} a_{ks}$  el desplazamiento y velocidad del apoyo en la dirección s (Fig. 5).

Recordando la expresión genérica de una ecuación modal:

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = \{\Phi_r\}^T \{F\} \quad (20)$$

**Fig. 5.** Conjunto rotor-apoyo. Dado que en el sistema de ecuaciones que se obtenga al acoplar (17) y (18) aparecerán los gdl del rotor {q} y las

coordenadas modales {η} de la "parte estática", la contribución en la dirección "s" del apoyo "k" al vector de fuerzas será:

$$\{F_{a_{ks}}\} = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, \alpha_1^s, \alpha_2^s, \dots, \alpha_{n^{\text{modos}}}^s\}^T \cdot F_{a_{ks}} = \{a_{ks}\} \cdot F_{a_{ks}} \quad (21)$$

donde el "1" corresponderá a la posición del gdl del rotor "q<sub>s</sub>", asociado al apoyo "k" en dirección "s", y el resto de las posiciones no nulas del vector a las diferentes coordenadas modales de la estructura estática.

Desglosando en (17) y (18) los vectores de fuerzas -{F<sub>R</sub>} y {F<sub>e</sub>}- en fuerzas internas al sistema y fuerzas externas, se obtiene:

$$[M_R]\{\ddot{x}_R\} + [C_R]\{\dot{x}_R\} + [\bar{G}_R]\{\dot{x}_R\} + [\bar{K}_R]\{x_R\} = \{f_{Ri}\} + \{f_{Re}\} \quad (22)$$

$$[m_e]\{\ddot{\eta}_e\} + [c_e]\{\dot{\eta}_e\} + [k_e]\{\eta_e\} = [\Phi]^T \{f_{ei}\} + [\Phi]^T \{f_{ee}\} \quad (23)$$

siendo {f<sub>Re</sub>}, {f<sub>Ri</sub>} y {f<sub>ee</sub>}, {f<sub>ei</sub>} las fuerzas exteriores e interiores que actúan sobre rotor y parte "estática", respectivamente. Y son precisamente las interiores, debidas a los esfuerzos en los apoyos, las que permitirán acoplar los sistemas. Recordando (19):

$$\{f_{Ri}\} = -\{f_{ei}\} = \{F_{a_i}(x_R - x_e, \dot{x}_R - \dot{x}_e)\} \quad (24)$$

y considerando que el movimiento de la "parte estática" puede expresarse en función de sus modos de vibración, las fuerzas en los apoyos resultan:

$$x_e = \sum_{r=1}^{N^{\text{modos}}} \phi_e^r \cdot \eta_r \Rightarrow \{x_e\} = [\Phi]\{\eta_e\} \Rightarrow \{f_{Ri}\} = -\{f_{ei}\} = \{Fa(x_R, \eta_e, \dot{x}_R, \dot{\eta}_e)\} \quad (25)$$

donde "Fa" es una función dependiente de las incógnitas del sistema, por lo que corresponde pasar dichos términos al miembro izquierdo de (22) y (23):

$$\boxed{[M_R]\{\ddot{x}_R\} + [C_R]\{\dot{x}_R\} + [\bar{G}_R]\{x_R\} + [K_R]\{x_R\} - \{f_{Ri}\} = \{f_{Re}\}} \quad (26)$$

$$\boxed{[m_e]\{\ddot{x}_a\} + [c_e]\{\dot{x}_a\} + [k_e]\{x_a\} - [\Phi]^T \{f_{ei}\} = [\Phi]^T \{f_{ee}\}} \quad (27)$$

### 3. Resolución de las ecuaciones del sistema

Los parámetros modales caracterizan el comportamiento del rotor en régimen estacionario (velocidad angular constante) cuando los apoyos pueden considerarse *lineales*. Se obtienen resolviendo el problema de autovalores y autovectores  $[A]\{z\} = \lambda\{z\}$  que se plantea al hacer nulo el término de fuerzas -vibraciones libres- asociado a las ecuaciones del movimiento (26) y (27) y donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}([\bar{G}] + [C]) & -[M]^{-1}([K] + \dot{\theta}[\hat{C}]) \\ [I] & [0] \end{bmatrix}, \quad \{z\}^T = \{\{\dot{x}\}\{x\}\}^T \quad (28)$$

En el análisis del rotor en régimen estacionario, se trata de determinar la respuesta a la excitación provocada por desequilibrios o el desalineamientos. La resolución de esta cuestión sólo tiene sentido en dos supuestos: partiendo de la hipótesis de linealidad de los apoyos, o -considerando apoyos no lineales- pretendiendo analizar únicamente el primer armónico de la respuesta del sistema. Considerando los apoyos con característica de comportamiento lineal, las ecuaciones del sistema pueden expresarse /27/:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C] - \dot{\theta}[G]\{\dot{x}\} + [K] + \dot{\theta}[\hat{C}]\{x\} = \{F\} \quad (29)$$

donde el vector  $\{F\}$  tiene la forma:  $\{F\} = \{\{f_{R_{Be}} \quad f_{R_{Ae}}\}^T \quad [\Phi]^T \{f_{ee}\}\}^T = \{-\dot{\theta}^2\{V\}' \quad [\Phi]^T \{f_{ee}\}\}^T$

siendo el vector  $\{V\}' = \partial\{V\}/\partial\theta$ , y el vector  $\{V\}$  el obtenido al acoplar los  $\{V_i\}^d$  y  $\{V_j\}^e$ , vectores de descentramiento asociados a los discos (4) y elementos (8) del rotor.

Suponiendo nulas las fuerzas exteriores que actúan sobre la parte estática ( $\{f_{ee}\}=0$ ), y considerando las fuerzas generalizadas -no nulas- expresadas de forma armónica  $-\omega^2\{V\}' \cdot e^{i\omega t}$ , la respuesta también será de tipo armónico pudiendo expresarse:

$$\{x\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad \{\dot{x}\} = i\omega\{X\}e^{i\omega t} \quad \{\ddot{x}\} = -\omega^2\{X\}e^{i\omega t} \quad (30)$$

Introduciendo estas consideraciones en la ecuación (29):

$$\left[ -\omega^2[M] + i\omega[C] - \dot{\theta}[G] \right] + \left[ [K] + \dot{\theta}[\hat{C}] \right] \{X\} = \begin{Bmatrix} -\omega^2\{V\}' \\ \{0\} \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} \{V\}' \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Al coincidir la frecuencia de excitación  $\omega$  con la  $\dot{\theta}$  del rotor, despejando la respuesta  $\{X\}$  se obtiene un sistema de ecuaciones de matriz compleja de fácil resolución:

$$\boxed{\{X\} = -\omega^2 \left[ -\omega^2[M] + i\omega[C] - \omega[G] \right] + \left[ [K] + \omega[\hat{C}] \right]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \{V\}' \\ \{0\} \end{Bmatrix}} \quad (32)$$

Para determinar la respuesta en el tiempo hay que integrar el sistema de ecuaciones (26) y (27). Existen varios métodos numéricos, y García de Jalón y Bayo realizan /28/ una descripción de los más utilizados: el método de las Series de Taylor y su aproximación conocida como método de Euler, los métodos explícitos e implícitos de Runge-Kutta, los métodos explícitos e implícitos multi-etapa y la familia de algoritmos del método de Newmark, la más popular familia de algoritmos empleada en este tipo de problemas. En este caso, se ha aplicado el método de Newmark haciendo uso del algoritmo de integración en el tiempo conocido como la "regla trapezoidal".

El sistema que resulta al aplicar el método de integración es doblemente no lineal: la no linealidad de los apoyos y la incorporación de la variable  $\theta$  que interviene en la formación de matrices y vectores y, además, añade al sistema una ecuación en la que los gdl del rotor, incógnitas del sistema, aparecen en las matrices. Por ello, se ha linealizado el sistema con el "método iterativo de Newton-Raphson", con convergencia de orden cuadrático en la proximidad de la solución /29/.

El análisis de la respuesta en el tiempo lleva a la integración de las ecuaciones (26) y (27), donde las matrices del rotor aparecen orladas por la ecuación inferior del sistema (14) asociada a la coordenada  $\theta$ . La aplicación del método de Newmark (método implícito) lleva a considerar el equilibrio del sistema en el instante " $t+\Delta t$ ":

$${}^{t+\Delta t}f(U^*) = \{0\} \quad (33)$$

siendo  $U = (\ddot{x}, \dot{x}, x, t)$  y  $U^*$  la solución de dicho sistema para el instante " $t+\Delta t$ ".

Los pasos seguidos en el procedimiento iterativo hasta el equilibrio en " $t+\Delta t$ " son:

1- Estimación para ese instante de una posición inicial a partir de los resultados del paso de integración anterior (se ha supuesto movimiento uniformemente acelerado):

$$\{\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^0 = \{\ddot{\mathbf{x}}_t\} \quad \{\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^0 = \{\dot{\mathbf{x}}_t\} + \{\ddot{\mathbf{x}}_t\}\Delta t \quad \{\mathbf{x}_{t+\Delta t}\}^0 = \{\mathbf{x}_t\} + \{\dot{\mathbf{x}}_t\}\Delta t + \frac{1}{2}\{\ddot{\mathbf{x}}_t\}\Delta t^2 \quad (34)$$

2- Linealización del sistema mediante la aplicación de Newton-Raphson:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) \cong \mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \{\Delta \ddot{\mathbf{x}}\} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \{\Delta \dot{\mathbf{x}}\} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \{\Delta \mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (35)$$

donde, pasando los términos conocidos a la derecha de la igualdad,

$$[\mathbf{M}_{t+\Delta t}]^{(i-1)}\{\Delta \ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}_{t+\Delta t}]^{(i-1)}\{\Delta \dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}_{t+\Delta t}]^{(i-1)}\{\Delta \mathbf{x}\} = -\mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (36)$$

siendo:  $[\mathbf{M}_{t+\Delta t}]^{(i-1)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \quad [\mathbf{C}_{t+\Delta t}]^{(i-1)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \quad [\mathbf{K}_{t+\Delta t}]^{(i-1)} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}}$

3- Aplicación del método de integración -Newmark- considerando la suposición realizada (34) al comienzo de cada paso de integración:

$$\{\Delta \ddot{\mathbf{x}}\} = \mathbf{a}_0\{\Delta \mathbf{x}\} \quad \{\Delta \dot{\mathbf{x}}\} = \mathbf{a}_1\{\Delta \mathbf{x}\} \quad [\mathbf{a}_0[\mathbf{M}_{t+\Delta t}]^{(i-1)} + \mathbf{a}_1[\mathbf{C}_{t+\Delta t}]^{(i-1)} + [\mathbf{K}_{t+\Delta t}]^{(i-1)}]\{\Delta \mathbf{x}\} = -\mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}) \quad (37)$$

4- Resuelto el sistema (37), se calcula:

$$\{\mathbf{x}_{t+\Delta t}\}^i = \{\mathbf{x}_{t+\Delta t}\}^{(i-1)} + \{\Delta \mathbf{x}\} \quad \{\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^i = \{\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^{(i-1)} + \mathbf{a}_1\{\Delta \mathbf{x}\} \quad \{\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^i = \{\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}^{(i-1)} + \mathbf{a}_0\{\Delta \mathbf{x}\} \quad (38)$$

Si el desequilibrio del sistema  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^i, \dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}^i, \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}^i, t + \Delta t)$  es mayor que la tolerancia fijada por el criterio de convergencia se regresa al paso 2.

#### 4. Conclusiones

Se ha desarrollado la formulación matemática de un modelo de cálculo que permite analizar el comportamiento dinámico de rotores flexibles con apoyos de comportamiento no lineal y cuya estructura soporte no es necesariamente rígida. Planteadas las ecuaciones del movimiento del sistema, el modelo calcula sus parámetros modales y simula su respuesta en régimen estacionario o transitorio.

El modelo de cálculo se ha implementado en un programa de computador disponible para ser utilizado en entornos de 32 bits como Windows NT. El desarrollo de dicho programa se ha llevado a cabo haciendo uso de los lenguajes de programación C, C++ y FORTRAN.

#### 5. Referencias

- /30/ Amitabha, L. y Mallik, A. K. (1976)- "Theory of Mechanisms and Machines", Affiliated East-West Press PVT LTD, New Delhy.
- /31/ Bolleter, U. y Marscher, W. D. (Mayo 1988)- "Vibration Short Course", Texas A&M 5th International Pump Symposium.
- /32/ Den Hartog, J. P. (1956) - "Mechanical Vibrations", Mc Graw-Hill.
- /33/ Ditemberg, F. M. (1961) - "Vibraciones de Flexión en Rotores Flexibles", Production Engineering Research Association, Butterwolts, Londres.
- /34/ Eshleman, R. L. y Eubanks, R. A. (Noviembre, 1969) - "On the Critical Speeds of a Continuous Rotor", ASME, *J. of Engineering for Industry*, pp 1180-1188.
- /35/ García de Jalón, J. y Bayo, E. (1993) -"Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real Time Challenge", Ed. Springer Verlag.
- /36/ Green, R. B. (Diciembre 1948) - "Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors", Trans. ASME, vol. 70, pp 369-376.
- /37/ Lord Rayleigh (1945) - "Teoría del Sonido", Dover Publications, Nueva York.
- /38/ Nelson, H. D. (Octubre 1980) - "A Finite Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory", ASME, *Journal of Mechanical Design*, vol. 102, pp 793-803.
- /39/ Nelson, H. D. (1976) - "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements", ASME, *J. of Engineering for Industry*, vol. 98 (2), pp 593-600.
- /40/ No, M. y Celigüeta, J. T. (1987) - "Análisis Dinámico con Subestructuras Mediante Técnicas de Síntesis Modal", 2º Congreso Mundial Vasco, Bilbao.
- /41/ Pintor, J.M. y López (1997) - "Influencia del Comportamiento No Lineal de Cijinetes Hidrodinámicos en la Dinámica de Rotores Flexibles", XII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Bilbao.
- /42/ Rao, J. S. (1983) - "Rotor Dynamics", Wiley Eastern Limited, New Delhy.
- /43/ Segura, M. M. y Celigüeta, J. T. (Diciembre 1988) - "Técnicas de Síntesis Modal en el Análisis Dinámico con Subestructuras Multinivel", VII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Valencia.
- /44/ Timoshenko, S. (1954) - "Collected Papers", p.XI, Mc. Graw-Hill, Nueva York.
- /45/ Vera, E. (Enero 1988) - "Estudio Dinámico de Rotores Flexibles", Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastián.
- /46/ Vinyolas, J. (1983) - "Análisis Dinámico de Rotores Flexibles Mediante el Método de los Elementos Finitos", II Congreso de Ingeniería Mecánica, Sevilla.
- /47/ Zorzi, E. S. y Nelson, H. D. (Enero 1977) - "Finite Element Simulation of Rotor Bearing Systems with Internal Damping", *J. of Engineering for Power*, pp 71-76.