

## 5. Bibrazioak makinetan

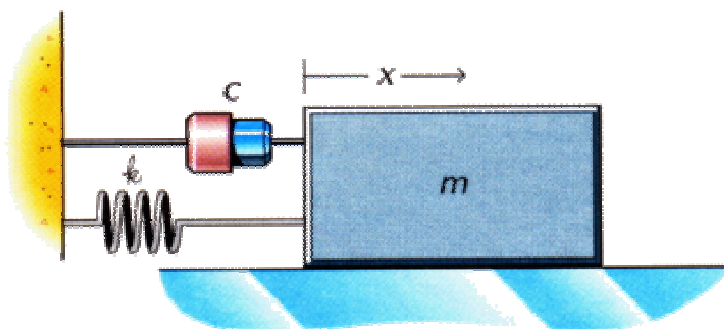
Bibrazioa oreka-posizioaren inguruko oszilazio txikia da.

Bibrazio-mugimendua makinetan pieza elastikoen gainean indar aldakorrek dihardutenean gertatzen da. Oro har, mugimendu horiek ez dira desiragarriak, nahiz eta kasu batzuetan (adib., bibraziozko garraiatzaileak) makinetan apropos diseinatu.

Bibrazioak aztertzeko hurrengo prozedura orokorra jarraitu behar da:

- Ikertu behar diren piezen masa eta elastikotasuna balioztatzea.
- Jardun duen marruskadura kalkulatzeko.
- Egiazko inplementu mekanikoa idealizatzea. Horretarako, antzeko masak, malgukiak eta motelgailuak dituen sistema erabiltzea.
- Sistema idealizatuaren mugimendu-ekuazio diferentziala idaztea.
- Ekuazioa ebatzi eta emaitzak interpretatzea.

Sistema ideal xumeena masa bakarra, malguki bakarra eta motelgailu bat da. Hurrengo irudian ikus daiteke. Sistema askatasunaren mailako sistema modura definitzen da.



1. irudia

Sistema honentzat mugimenduaren ekuazio diferentziala honakoa da:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

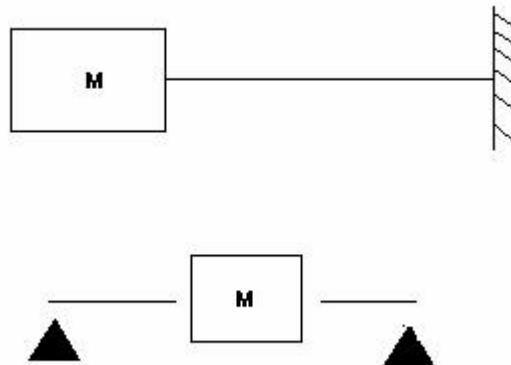
- $m$ : masa
- $k$ : malgukiaren konstantea (deformazio-unitateko indarra)
- $c$ : moteltze-konstantea (abiadura-unitateko indarra). Moteltzea biskatsua dela suposatzen da, hau da, indar erresistentea abiadurarekiko proportzionala dela.
- $F(t)$ : kanpoko indarra, denboraren arabera
- $x$ : oreka estatikoaren posiziotik masaren desplazamendua
- $\dot{x}, \ddot{x}$ : t-rekiko x-ren lehenengo eta bigarren deribatua, hurrenez hurren.

Arestian aipatu den ekuazio diferentzialarekin askatasun-maila bakarreko edozein sistema deskriba daiteke, malgukiaren indarra desplazamendurekiko proportzionala bada eta marruskadura-indarra abiadurarekiko proportzionala bada. Askatasun-maila bakarraren sistema orokorrarentzat hurrengo idatz daiteke:

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = F(t) \quad (2)$$

$m_e$ ,  $C_e$ ,  $K_e$ : masa baliokidea, moteltze-konstante baliokidea eta malgukiaren konstante baliokidea dira, hurrenez hurren.  $x$  desplazamendua lineala ala angeluarra izan daiteke.

#### Adibidea:



### 5.1. BIBRAZIO LIBREAK

Asaldu ostean, kitzikatzeko kanpoko indarririk ez dagoenean gertatzen da, hau da,  $F(t)=0$ . Ekuazio diferentziala honakoa da:

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = 0 \quad (3)$$

Hurrengo moduko irtenbideak bilatzen dira:  $x = C \cdot e^{s \cdot t}$

Hala, ekuazioaren ebazpena honakoa izan daiteke:  $x = A \cdot e^{s_1 \cdot t} + B \cdot e^{s_2 \cdot t}$

Non:

$$s_1 = -\frac{c_e}{2m_e} + \sqrt{\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 - \frac{k_e}{m_e}} \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{c_e}{2m_e} - \sqrt{\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 - \frac{k_e}{m_e}} \quad (4) \text{ y } (5)$$

$A_1$  eta  $A_2$ : hasierako baldintzek zehazten dituzten konstanteak.

**$c_c$  moteltze kritikoa:**  $2\sqrt{k_e \cdot m_e}$

Moteltze kritikoa: egiazko moteltzearen eta moteltze kritikoren arteko zatidura.

$$\zeta = \frac{c_e}{c_c} \quad (6)$$

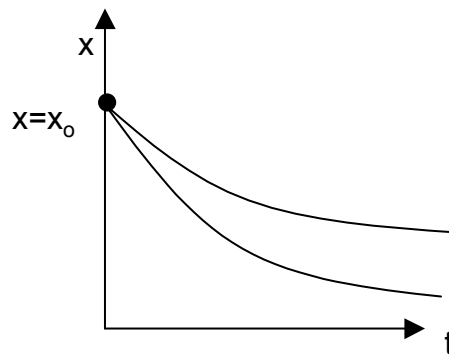
Hiru kasu bereiz daitezke:

**1. KASUA: MOTELTZE SUPERKRITIKOA**  $\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 > \frac{k_e}{m_e} \rightarrow c_e > 2\sqrt{k_e \cdot m_e}$

Ekuazioaren erroak bi soluzio desberdin dira, egiazkoak eta negatiboak:

$$x = A \cdot e^{s_1 \cdot t} + B \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad (7)$$

Soluzioa ez da uhin-motakoa, beheranzko esponentziala baizik eta  $c_e$  moteltzea handiagoa den heinean, lehenago izango du zerora jotzeko joera.



2. irudia

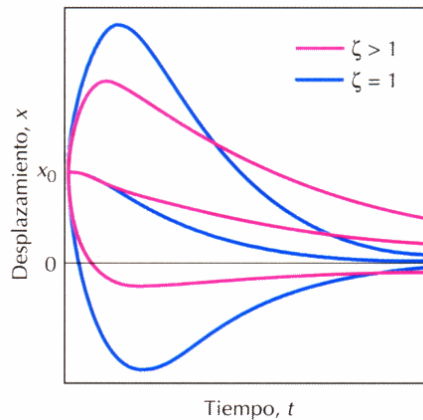
**2. KASUA: MOTELTZE KRITIKOA**  $\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 = \frac{k_e}{m_e} \rightarrow c_e = 2\sqrt{k_e \cdot m_e}$

Ekuazioaren erroak bi soluzio berdin dira, egiazkoak eta negatiboak:

$$x = (A + B) \cdot e^{-\frac{c_e}{2m_e} \cdot t} \quad (8)$$

Moteltzea kritikoa baino handiagoa edo berdina bada, bibrazio libreentzat ekuazioaren soluzioak ez du termino periodikorik. Hasieran asaldu ostean, masa orekako posiziora itzultzen da, baina ez du oszilatzen. Hau da, kasu honetan, 1. kasuan gertatzen zen bezala, soluzioa ez da uhin-motakoa beheranzko esponentziala baizik.

1. kasuan:  $\xi > 1$ ; 2. kasuan:  $\xi = 1$



3. irudia

**3. KASUA: MOTELTZE AZPIKRITIKOA:**  $\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 < \frac{k_e}{m_e} \rightarrow c_e < 2\sqrt{k_e \cdot m_e} = c_c$

Kasu honetan  $\xi < 1$  da.

Ekuazioaren erroak bi soluzio desberdin eta konplexuak dira.

$$x = -A \cdot e^{-\frac{c_e}{2m_e} \cdot t} \cdot e^{j \left( \sqrt{\frac{k_e}{m_e} - \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2} \right) \cdot t} + B \quad (9)$$

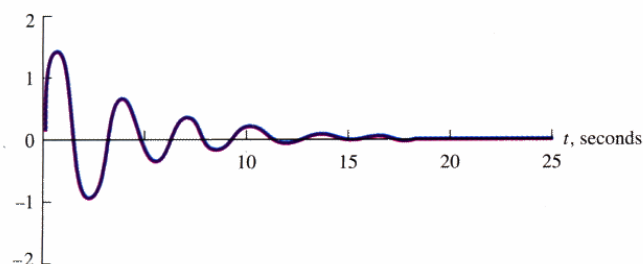
$$x = X \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_d t + \gamma) \quad (10)$$

X,  $\gamma$  konstanteak hasierako baldintzetatik abiatuta zehazten dira.

$$\alpha = \frac{c_e}{2m_e} \quad (11)$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_e}{m_e} - \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2} \quad (12)$$

$\omega_d$ : sistemaren **frekuentzia moteldua**. Moteltzea zero balitz, frekuentzia hurrengoa litzateke:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$  (**frekuentzia naturala**)

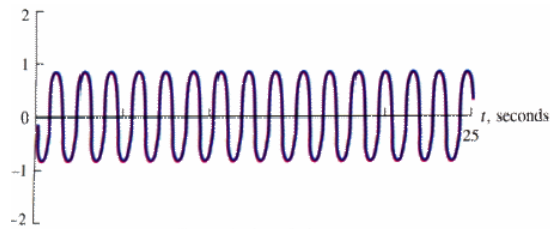


4. irudia

### Kasu berezia: moteltze nulua (ardatzak)

Kasu honetan  $x = X \cdot \sin(\omega_d t + \gamma)$  Hasieran asaldu ostean, sistema etengabe oszilatzen gelditzen da, ez baitago marruskadurarik. Oszilazioaren frekuentzia honakoa da:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \omega_n \quad (13)$$



5. irudia

## 5.2. BIBRAZIO INDARTUAK

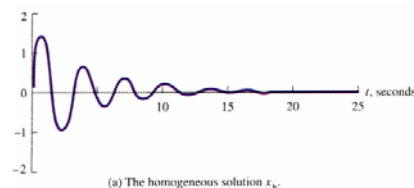
Kasu honetan  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  indar harmonikoak diharduela kontuan hartzen da.

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (14)$$

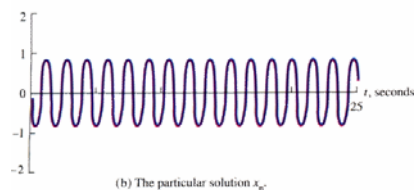
Ekuazio diferentzialaren soluzioa bibrazio libreentzat emandakoaren berdina da, baina integral berezia erantsi behar zaio. Soluzioa hurrengo moduan idatz daiteke:

$$x = X \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t + \gamma) + Y \cdot \sin(\omega t - \phi) \quad (15)$$

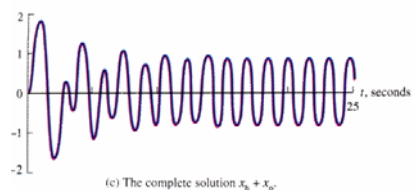
Aurreko adierazpenaren lehenengo zatiak bibrazio igarokorra adierazten du. Denborarekin desagertu egiten da. Bigarren zatiari bibrazioa egoera egonkorrean deritza. Ohiz zatirik interesgarriena da, aldi igarokorra gainditu ostean, sistemak  $Y$  hedaduraz eta  $\omega$  frekuentziaz oszilatuko baitu.



(a) The homogeneous solution  $x_h$



(b) The particular solution  $x_p$



(c) The complete solution  $x_h + x_p$

6. irudia

### Ondorioak:

Sistema jakinarentzat ( $k, m, c$ )  $Y$  hedadura  $w$  frekuentziaren mende dago:

$$Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k_e - m_e w)^2 + c_e w^2}} \quad (16)$$

$Y=Y(w)$  funtzioak maximoa du eta  $w_c$  frekuentzia kritikoa gertatzen da.

$$Y_{\max} \rightarrow w_{Y, \max} = w_c = w_n \sqrt{1 - 2 \left( \frac{c}{c_c} \right)^2} \quad (17)$$

Kitzikapen-frekuentzia  $w_c$ -rekin bat datorrenean, gehieneko deformazioa gertatzen da.  $c \approx 0$  bada,  $w_c = w_n$ .

Ardatz batean ez da abiadura kritikotik hurbil lan egin behar, gehieneko hedapenak izango baitira. Sistema batek abiadura kritikotik hurbil dauden frekuentzietan lan egiten badu, erresonantzia gertatzen dela esaten da. Eragiketarekiko frekuentzia (ardatzaren biraketa-abiadura), beraz, hurrengora mugatzen da:  $w \leq 0,65 \cdot w_c$

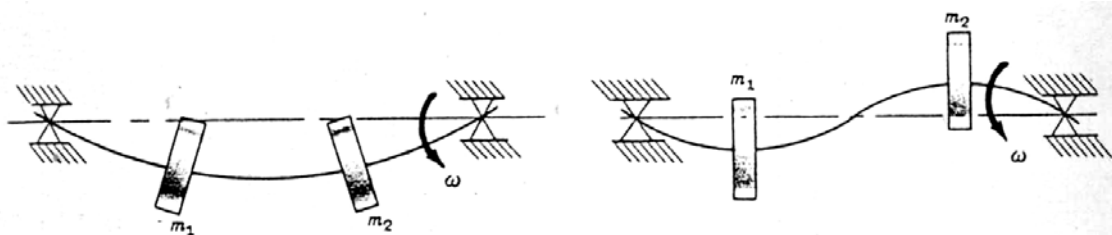
### 5.3. ABIADURA KRITIKOA ARDATZETAN

Nahiz eta kanpoko kargarik ez izan, ardatz guztiak errotazioan deformatu egiten dira. Deformazioa ondorengo faktoreen mende dago: ardatzaren eta euskarrien zurruntasuna, ardatzaren guztizko masa eta eransten diren piezak, errotazio-ardatzarekiko masaren desoreka eta sistemaren moteltzea.

Deformazioa ardatzaren biraketa-abiadura modura kontuan hartuta, gehieneko balioak abiadura kritikoa dituzten sistema 1 gdl-ko sistema izango da eta abiadura kritikoa bat izango du.  $n$  masak dituzten sistemarentzat,  $n$  gdl izango da eta  $n$  abiadura kritikoa izango dira.

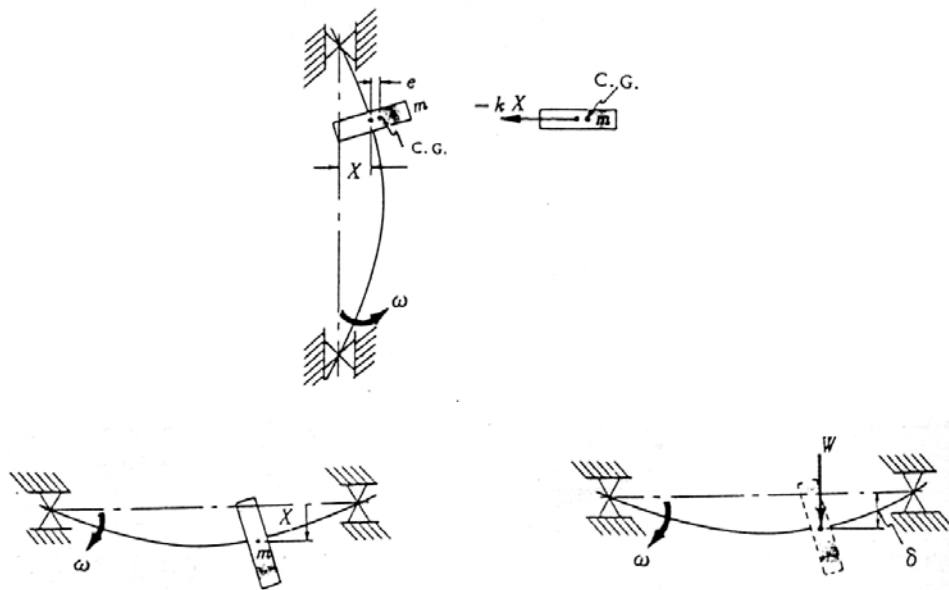
Normalean, bakarrik abiadura kritikoa txikiak (lehenengoak) eta batzuetan bigarrenak dute garrantzia. Gainerakoak, oro har, oso handiak dira eta eragiketaren  $s$  abiaduretatik oso urrun daude.

Lehenengo abiadura kritikoa ardatzaren flexioak ahalik eta modu errazena jarraitzen du. Bigarrenean, flexioak bigarren modurik errazena jarraitzen du, etab. Adibidez, muturretatik eutsitako ardatzak euskarrietan masa nahikoa handiak baditu (ardatzarenarekin erkatuz), hurrengo irudian azaldutako konfigurazioaren arabera deformatzen da, lehenengo eta bigarren abiadura kritikoa biratzen duenean, hurrenez hurren.



7. irudia

Masa bakarra daraman ardatzean eta elkartuta duen masarekin masa txikiagoa duela onartuz:



8. irudia

- $x$ : ardatzaren deformazioa errotazioan, masa kokatzen den puntuan
- $e$ : eszentrikotasuna
- $k$ =indarra/deformazioa

$$m\omega^2(x + e) = kx \rightarrow x = \frac{m\omega^2 e}{k - m\omega^2} \quad (18)$$

Aurreko ekuaziotik hurrengoa ondoriozta daiteke:  $e$  eszentrikotasuna nulua bada, ardatzaren  $x$  deformazioa nulua da ere, hurrengo baldintza betetzen den kasuetan izan ezik:  $k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Orduan,  $x = (m\omega^2 \cdot 0)/0$ , indeterminazioa.

Beraz, eszentrikotasuna nulua bada, ardatza deforma daitekeen abiadura bakarrari  $\omega_n$  oszilazioaren frekuentzia naturala deritza eta hurrengo adierazpenaren bidez definitzen da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (19)$$

$W$ : masaren pisua:  $W = mg$ ;  $\delta$ : deformazio estatikoa ( $W = mg$  indarrak sortutako deformazioa masa kokatzen den puntuan, hau da, bere pisuaren ondorioz sortutako deformazioa);  $g$ : grabitazio-konstantea.

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{W}{g} \\ k = \frac{W}{\delta} \end{array} \right\} \rightarrow w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{W/\delta}{W/g}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \cdot \text{Balio hori ardatzaren lehenengo abiadura}$$

kritikoa da.

1 gdl-ko sistema kontuan hartu dugunez, abiadura kritiko bakarra izango da.

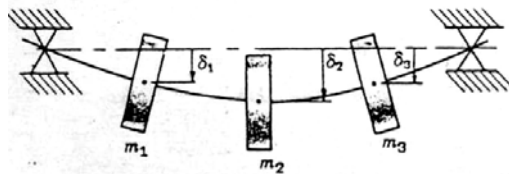
Ardatz batek masa mesprezagarria badu eta hori lotuta zenbait masa kontzentratzen badira ( $n$  askatasun-maila),  $n$  abiadura kritikoak kalkulatzeko metodo desberdinak daude:

- Rayleighen metodoa: masa anitzeko sisteman lehenengo abiadura kritikora hurbiltzeko aukera eskaintzen du (gehiegi balioetsia).
- Frekuentzien ekuazio-metodoa:  $n$  abiadurei buruzko balio zehatzak eskaintzen ditu, baina  $n > 3$  metodo konplexua da.
- Dunkerleyen metodoa: masa anitzeko sisteman lehenengo abiadura kritikora hurbiltzeko aukera eskaintzen du (gutxiegi balioetsia).

Rayleighen eta Dunkerleyen ekuazioak bibrazioaren lehen frekuentzia naturalarekiko hurbilketak dira. Bibrazioaren lehenengo frekuentzia naturala eta biraketako abiadura kritikoa berdinak dira ( $c=0$  denean). Oro har, Rayleighen ekuazioak gehiegi balioesten du frekuentzia naturala, bien bitartean, Dunkerleyen ekuazioak gutxiegi balioesten du.

### 5.3.1. RAYLEIGHEN METODOA

Ardatzak  $n$  masa ditu eta marruskadura nulua dela onartzen dugu.  $y$ : ardatzaren deformazioa errotazioan masa kokatzen den puntuan.  $\delta$ : deformazioak pisuengatik.



9. irudia

Sistemaren energia zinetikoa hurrengoa da:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \cdot (w \cdot y_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot (w \cdot y_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \cdot (w \cdot y_n)^2 = \frac{w^2}{2} \cdot \sum m_n \cdot y_n^2 \quad (20)$$

Lortutako energia zinetikoa eta masak  $y_1, y_2, \dots, y_n$  posizioetara eramateko beharrezkoa den deformazio-lana berdinak dira. Deformazio-lana hurrengoa da:

$$W_d = \frac{1}{2} F_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} F_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} F_n \cdot y_n = \frac{1}{2} k_1 \cdot y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \cdot y_2^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n \cdot y_n^2 = \frac{1}{2} \sum k_n \cdot y_n^2 \quad |$$

Adierazpenak berdinduz hurrengoa lortzen da:

$$w^2 = \frac{\sum k_n \cdot y_n^2}{\sum m_n \cdot y_n^2} \quad (21)$$



Rayleighen hurbilketaren arabera, deformazioak edo  $Y$  hedadurak  $\delta$  pisuaren ondorioz izandako deformazioekiko proportzionalak dira:

$$y_i = C \cdot \delta_i \quad (22)$$

Eta hurrengoaren ondorioz:

$$m_i = \frac{W_i}{g} \text{ y } k_i = \frac{W_i}{\delta_i} \quad (23)$$

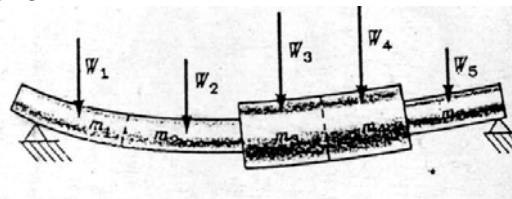
Ordezkatuz,

$$w^2 = \frac{g \cdot \sum W_n \cdot \delta_n}{\sum W_n \cdot \delta_n^2} \quad (24)$$

Hortik lehenengo abiadura kritikoa lortzen da:

$$w_{c1} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum W_n \cdot \delta_n}{\sum W_n \cdot \delta_n^2}} \quad (25)$$

Ekuazioa bera erabil daiteke masa banatuta duen ardatzaren lehenengo abiadura kritikoa kalkulatzeko.

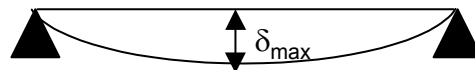


10. irudia

Masa  $m_1, m_2 \dots$  zati-kopurutan banatzen da. Zati bakoitzaren masa grabitate-zentroan bertan kontzentratutzat jotzen da. Esperientziak berak azpizati-kopurua adieraziko du. Hala eta guztiz ere, nahiz eta zatiketa oso fina ez izan, xehetasun handia lortzen da.

Masa osagarriak ez duen ardatzean hurrengo ondoriozta daiteke:

$$w_c = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{g}{\delta_{\max}}} \quad (26)$$



11. irudia

### 5.3.2. FREKUENTZI EKUAZIOAREN METODOA

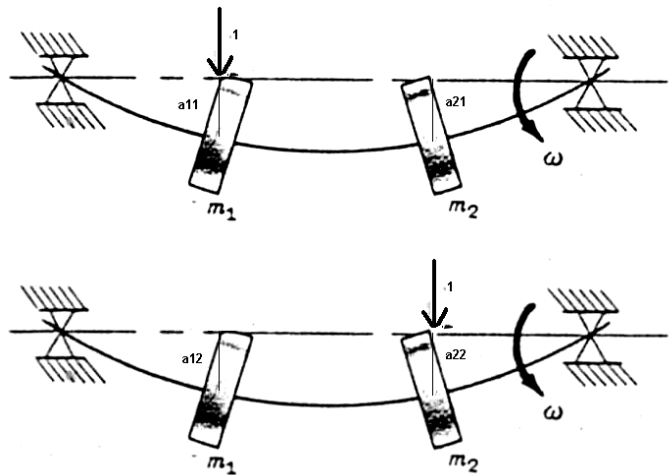
Metodo honen bidez ardatzaren  $n$  abiadura kritikoak zehatz-mehatz kalkula daitezke.

Aztertzeko bi masako sistema kontuan hartzen da. Ondoren,  $n$  masen kasu orokorrera estrapolatzen da.

Frekuentzien ekuazioa planteatzen da eta eragin-koefizienteak izeneko faktoreak eranstean dira. Ondoren definituko ditugu:

- $a_{11}$ : 1. puntuan aplikatutako karga unitariogatik 1. puntuko deformazioa
- $a_{22}$ : 2. puntuan aplikatutako karga unitariogatik 2. puntuko deformazioa
- $a_{12}$ : 1. puntuan aplikatutako karga unitariogatik 2. puntuko deformazioa
- $a_{21}$ : 2. puntuan aplikatutako karga unitariogatik 1. puntuko deformazioa

Maxwellen elkarrekotasun-teorema dela-eta,  $a_{12}=a_{21}$  betetzen da.



12. irudia

#### Metodoa frogatzea

$$F_{c1} = m_1 w^2 y_1 \quad (27)$$

$$F_{c2} = m_2 w^2 y_2$$

Deformazioak honako hauek dira:

$$y_1 = a_{11} \cdot F_{c1} + a_{12} \cdot F_{c2} \quad (28)$$

$$y_2 = a_{21} \cdot F_{c1} + a_{22} \cdot F_{c2}$$

Ondorioz, (27) adierazpenak (28) adierazpenetan ordezkatzuz:

$$y_1 = a_{11} \cdot m_1 w^2 y_1 + a_{12} \cdot m_2 w^2 y_2 \quad (29)$$

$$y_2 = a_{21} \cdot m_1 w^2 y_1 + a_{22} \cdot m_2 w^2 y_2$$

Bi adierazpenak  $w^2$  faktorearekin zatituz, eta aurreko sistema homogeneo bihurtuz:



$$\begin{aligned} \left(a_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{w^2}\right)y_1 + (a_{12} \cdot m_2)y_2 &= 0 \\ (a_{21} \cdot m_1)y_1 + \left(a_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{w^2}\right)y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Soluzio nulua hutsala da; beraz, soluzio desberdina lortzeko, aurreko sistema homogeneoaren determinanteak nulua izan behar du:

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{w^2}\right) & (a_{12} \cdot m_2) \\ (a_{21} \cdot m_1) & \left(a_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{w^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

Determinantea landuz:

$$\left(a_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{w^2}\right) \cdot \left(a_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{w^2}\right) - (a_{21} \cdot m_1) \cdot (a_{12} \cdot m_2) = 0$$

$$\frac{1}{w^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2) \cdot \frac{1}{w^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

$$x^2 - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2) \cdot x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(a_{11}m_1 + a_{22}m_2) \pm \sqrt{(a_{11}m_1 + a_{22}m_2)^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2}}{2} \quad (32)$$

Hala, bi soluzio positibo eta bi negatibo lortzen dira. Soluzio negatiboek ez dute zentzu fisikorik, frekuentzia negatiborik ez baitago. Soluzio positiboak  $w_{c1}$  eta  $w_{c2}$  abiadura kritikoak dira eta honakoa betetzen da:  $w_{c2} > w_{c1}$ .

Bi masa baino gehiago dituzten sistemen kasuan, determinantea kalkulatzeko konplexua da eta beste metodo bat erabiliz (adb., Rayleigh) gutxi gorabeherako soluzioa lortzea interesgarria izango da.

$a_{ij}$  koefizienteen unitateak honako hauek dira:  $[L/F]=[m/N]$

### 5.3.3. DUNKERLEYEN METODOA

Frekuentzien ekuaziotik abiatuta gutxi gorabeherako ekuazioa ondoriozta daiteke eta Dunkerleyen ekuazioa deritza. Lehenengo abiadura kritikoa kalkulatzeko balio du.

$$\left(\frac{1}{w_{c1}^2}\right) + \left(\frac{1}{w_{c2}^2}\right) = a_{11}m_1 + a_{22}m_2, \text{ ya que } x_1 + x_2 = -b \quad (33)$$

$W_{c2}^2$ -n terminoa mespreza daiteke, honakoa betetzen baita  $(1/w_{c1}^2) \gg (1/w_{c2}^2)$ , beraz:

$$\left(\frac{1}{w_{c1}^2}\right) = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 = a_{11} \cdot \frac{W_1}{g} + a_{22} \cdot \frac{W_2}{g} = \frac{\delta_{11}}{g} + \frac{\delta_{22}}{g} \quad (34)$$

$$\delta_{11} = a_{11} \cdot W_1 \text{ eta } \delta_{22} = a_{22} \cdot W_2 \text{ denez.}$$

Eta (ekuazioa) denez, aurreko adierazpenean ordezkatur:

$$\left(\frac{1}{w_{c1}^2}\right) = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \quad (35)$$

$w_1$ : ardatzaren frekuentzia naturala edo kritikoa bakarrik 1. masa balu.

$w_2$ : ardatzaren frekuentzia naturala edo kritikoa bakarrik 2. masa balu.

Hala, oro har:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= a_{11} \cdot W_1 \\ w_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{W_1}{m_1 \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{m_1 \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{g}{a_{11} \cdot W_1}}$$

...

$$\left. \begin{aligned} \delta_{nn} &= a_{nn} \cdot W_n \\ w_n &= \sqrt{\frac{k_n}{m_n}} = \sqrt{\frac{W_n}{m_n \delta_{nn}}} = \sqrt{\frac{m_n g}{m_n \delta_{nn}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{nn}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow w_n = \sqrt{\frac{g}{a_{nn} \cdot W_n}}$$

$$\boxed{\frac{1}{w_{c1}^2} = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} + \dots + \frac{1}{w_n^2}} \quad (36)$$

Oso garrantzitsua da  $\delta$  eta  $y$  bereiztea. Gogora dezagun  $y$  frekuentzia kritikoa ardatzaren deformazioa adierazteko erabiltzen dela. Erresonantziaren fenomenoarengatik, deformazio hori  $\delta$  pisuei dagokien deformazioa baino handiagoa da.